Berekeningen met rente

Drs. P. Sneep

1. Inleiding

In de bedrijfscalculatie neemt het renterekenen een belangrijke plaats in, bijvoorbeeld in het kader van investeringsbeslissingen: steeds vaker kiezen ondernemingen voor de toepassing van methoden die rekening houden met de tijdwaarde van het geld.

2. Rente

2.1. Tijdvoorkeur voor geld en rentevergoeding

Bedrijfscalculaties hebben, onder andere, te maken met berekeningen die betrekking hebben op de *waardering van geld.*
Mensen hebben, in het algemeen, een voorkeur voor geld op dit moment, *huidig geld,* boven geld in de toekomst, *toekomstig geld.* Men noemt dit verschijnsel wel *tijdvoorkeur voor geld;* het hangt samen met wat de econoom Von Böhm-Bawerk aanduidde als perspectivische verkleining: de onderschatting van toekomstige waarden. Mensen willen daarom een vergoeding hebben als zij geld uitlenen en *huidig geld* verruilen voor *toekomstig geld.*
De algemeen gebruikelijke naam voor deze vergoeding is rente.

De tijdvoorkeur voor geld staat op zichzelf los van het begrip *inflatie.* Inflatie betekent dat de koopkracht in een bepaalde periode afneemt: men kan met een bepaald bedrag op *dit* moment meer doen dan over enige tijd. Inflatie houdt in dat men bij een gelijkblijvend inkomen minder met zijn geld kan doen, er is koopkrachtverlies. Inflatie is niet de oorzaak van de tijdvoorkeur van geld, deze voorkeur is een algemeen verschijnsel. Maar inflatie vergroot wel de mate van voorkeur voor huidig geld. Daarom bedingt men ten gevolge van de inflatie (= koopkrachtverlies) een hogere rentevergoeding.

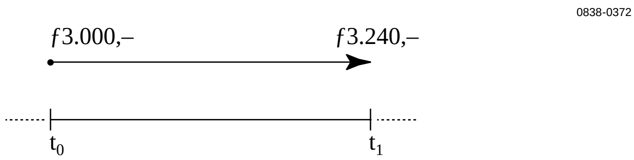
De rentevergoeding is in principe uit twee bestanddelen opgebouwd:
– een vergoeding omdat men huidig geld verruilt voor toekomstig geld. In de literatuur noemt men deze „basisvergoeding” wel de *natuurlijke rente;* de hoogte ervan bedraagt zo ongeveer 3%;
– een vergoeding om het verlies aan koopkracht te compenseren.

Voorbeeld
Iemand heeft ƒ 3.000,— beschikbaar en wil een camrecorder kopen om daarmee het gebeuren om hem heen op de band vast te leggen.

Aan hem wordt gevraagd of hij bereid is dit geld uit te lenen voor een periode van één jaar. De (potentiële) geldgever zal hiertoe bereid (kunnen) zijn als daar een passende vergoeding tegenover staat:
– een vergoeding van ƒ 90,— voor het feit dat hij gedurende een jaar niet over zijn geld kan beschikken;
– een vergoeding voor het feit dat hij verwacht dat dezelfde camrecorder volgend jaar ƒ 3.150,— kost.

De geldgever is dus bereid de lening te verstrekken tegen een rentevergoeding van ƒ 240,—. Dat is 8% per jaar, want 8% van ƒ 3000,— is ƒ 240,—.

Uit dit voorbeeld mogen we geen algemene methode afleiden voor de berekening van de hoogte van de rente op de geld- en kapitaalmarkt. Er zijn (gelukkig) tal van factoren die de hoogte van de rente beïnvloeden. Wij gaan daar niet verder op in.
Het centrale probleem is:
Hoe kunnen wij geldbedragen, die op verschillende momenten aan de orde zijn, tot elkaar *herleiden* en ze met elkaar *vergelijken?*
Met andere woorden, wat is de relatie tussen de ƒ 3.000,— die de geldgever nu ter beschikking stelt (moment t_0) en de ƒ 3.240,— die hij na één jaar (moment t_1) ontvangt.
Grafisch kunnen wij deze problematiek als volgt op een *tijdlijn* weergeven.



Op de tijdlijn lezen we de tijd af van links naar rechts. De pijl accentueert nog eens hoe ƒ 3.000,— op t_0 zich ontwikkelt tot ƒ 3.240,— op t_1.

2.2. De herleiding van geldbedragen

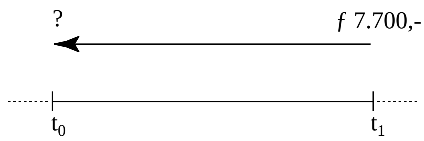
Geldbedragen die op verschillende tijdstippen vervallen, kunnen tot elkaar worden herleid. De term „vervallen” is een financieel-economische term, die te maken heeft met het dateren van geldbedragen. Een geldbedrag is een gedateerde grootheid, het speelt op een bepaald tijdstip. De herleiding van geldbedragen in de tijd is noodzakelijk om bedragen, die op verschillende tijdstippen vervallen, met elkaar te kunnen vergelijken.

De ƒ 3.000,— (uit de vorige paragraaf) op moment t_0 en de ƒ 3.240,— op moment t_1 zijn met elkaar te vergelijken. De *prestatie* van de geldgever is gelijk aan de *contraprestatie* van de geldnemer. De verbindende schakel is de rentevergoeding.
Men kan verschillende situaties tegenkomen:

– herleiding van waarden van *één geldbedrag* op verschillende momenten;
– herleiding van waarden van *meer geldbedragen* op verschillende momenten.

Eén geldbedrag
Op t_1 vervalt ƒ 7.700,—. Welke waarde heeft dit bedrag op t_0?

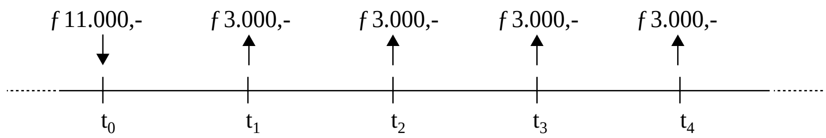
0838-0373



De waarde op t_0 zal kleiner zijn dan ƒ 7.700,—.
Hoeveel kleiner? Dat zal afhangen van de mate van voorkeur van huidig geld boven toekomstig geld.

Meer geldbedragen
De prestatie op t_0 is ƒ 11.000,—.
De contraprestatie op t_1, t_2, t_3 en t_4 is ƒ 3.000,—.

0838-0374



Bovenstaande kan de weergave zijn van een lening ter grootte van ƒ 11.000,— die op moment t_0 is verstrekt en in 4 gelijke bedragen na 3, 6, 9 en 12 maanden wordt terugbetaald. Bij de verstrekking van de lening heeft de geldgever zich afgevraagd of de prestatie, ƒ 11.000,— uitlenen, opwoog tegen de contraprestatie, viermaal ƒ 3.000,— terugontvangen. Met andere woorden: hij was bereid ƒ 11.000,— tijdelijk op te offeren in ruil voor ƒ 12.000,— in de komende tijd.

2.3. De rentevoet als herleidingsgrondslag

De vergoeding voor het afstand doen van geld (voor de geldgever) of de vergoeding voor het ter beschikking hebben van geld (voor de

geldnemer), rente, hangt dus samen met de waardering van geld in de loop van de tijd en de herleiding van geldbedragen tot elkaar. *Rente* is de vergoeding die noodzakelijk is in verband met het algemeen voorkomende verschijnsel van tijdvoorkeur voor geld. Deze vergoeding speelt niet alleen een rol bij geldovereenkomsten (leningen), maar ook wanneer er sprake is van beslag op vermogen in ruime zin. Hierbij kan men denken aan bedrijfsinvesteringen in machines en andere duurzame produktiemiddelen. Tegenover deze investeringen (= de prestatie) staan de opbrengsten (= de contraprestatie) die met de produktiemiddelen verkregen worden.
De vergoeding, de rente dus, kan men uitdrukken in *absolute getallen* (*ƒ* 1.000,— in de vorige paragraaf) of in percentages (8% in paragraaf 2.1.). Omdat bijna geen enkele geldovereenkomst gelijk is aan de andere en men op de momenten moet letten waarop de geldbedragen vervallen hanteert men in het renterekenen het begrip „rentevoet”.
De *rentevoet* is een *procentuele uitdrukking* van de rentevergoeding en vormt de grondslag van de waardering en herleiding van geldbedragen. Met behulp van deze grondslag kan men geldbedragen „vertalen” in de tijd. De rentevoet is als het ware een vertaalsleutel om een geldbedrag dat op tijdstip $t_0$vervalt te vertalen in de waarde op t_1 en omgekeerd.
In de financieel-economische praktijk kan de procentuele relatie op twee verschillende manieren worden gelegd. Men kan als basis voor de berekening de waarde op t_0 nemen of op tijdstip t_1.

2.4. Rentevergoeding, rentevoet en renteperiode

Rente is dus een vergoeding voor het gebruik van geld gedurende een bepaalde tijd. Het is de brug tussen geldbedragen die op verschillende tijdstippen vervallen. We hebben al eerder gezien dat het werken met een percentage betere vergelijkingsmogelijkheden biedt dan het werken met absolute bedragen. Om percentages met elkaar te kunnen vergelijken moet aan een andere voorwaarde zijn voldaan, namelijk *gelijke tijdeenheid.*
In de oorspronkelijke betekenis is „percentage”: per honderd per *tijdeenheid.* Hetzelfde geldt voor „promillage”, per duizend per *tijdeenheid.* In het Frans is het woord voor leeftijd, tijdperk: „âge”.
De tijdeenheid waarin men de rentevoet uitdrukt is de *renteperiode.* In de praktijk is de renteperiode in de meeste gevallen een jaar.

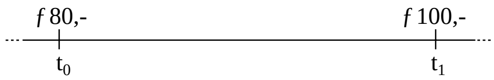
2.4.1. Rente, interest en disconto

In de financiële theorie en praktijk hanteert men naast het begrip „rente" de begrippen „interest" en „disconto".
Het Nederlandse woord „rente" is afgeleid van het Latijnse woord „rendita". Omstreeks 800 na Christus was dat de benaming van de vergoeding voor het lenen van geld. Als gevolg van een renteverbod, dat overigens tot de 14de eeuw duurde, was het verboden rendita te vragen. In plaats daarvan verlangde men een vergoeding voor kosten, schaden en gederfde winsten. Zo ontstond tóch een verschil tussen de prestatie van de geldgever en de prestatie van de geldnemer. Dit verschil noemde men in het Latijn „inter est", te vertalen als „dat wat ertussen ligt", namelijk tussen de prestatie van de geldgever en van de geldnemer. Hierin kan men eenvoudig het woord *int(e)rest* herkennen. Feitelijk gezien stelt interest niets anders voor dan de destijds verboden rendita.

Wij gebruiken het begrip rente als de algemene benaming voor de vergoeding wegens het gebruik van geld. Interest en disconto zijn twee specifieke vormen van rente(berekening).
Rente is:
– *interest;* met het symbool voor het interestperunage i van increase = toeneming ten opzichte van de beginwaarde;
– *disconto;* met het symbool voor het discontoperunage d van decrease = afneming ten opzichte van de eindwaarde.

Het verschil tussen interest en disconto illustreren wij met het volgende.

0838-0375



Op t_0 is er sprake van een bedrag ƒ 80,— (K_0) en op t_1 van ƒ 100,— (K_1).
De *geldgever,* wij gaan uit van een geldovereenkomst, levert op t_0 een prestatie ter grootte van ƒ 80,—. De *geldnemer* levert op t_1 een contraprestatie van ƒ 100,—. Het verschil tussen de beide bedragen, ƒ 20,—, is de rentevergoeding die deze overeenkomst mogelijk maakt. De rentevergoeding zorgt ervoor dat K_0 en K_1, bedragen die op verschillende tijdstippen vervallen, toch met elkaar vergeleken kunnen worden.
Geldgever en geldnemer kennen beiden, zo blijkt uit de overeenstemming, aan ƒ 80,— op t_0 *eenzelfde waarde* toe als aan ƒ 100,— op t_1.

Anders gezegd: de rentevergoeding van ƒ 20,— leidt tot *equivalentie van de prestatie van de geldgever en de geldnemer.*

Het rentepercentage, dat de basis is voor de equivalentie, kan men op twee manieren uitdrukken:
- als *interestpercentage;*
- als *discontopercentage.*

Interest
De rente is een percentage van de prestatie van de *geldgever.*
Dus: ƒ 20,— is 25% van ƒ 80,— (= $i \times K_0$).

Disconto
De rente is een percentage van de prestatie van de *geldnemer.*
Dus: ƒ 20,— is 20% van ƒ 100,— (= $d \times K_1$).

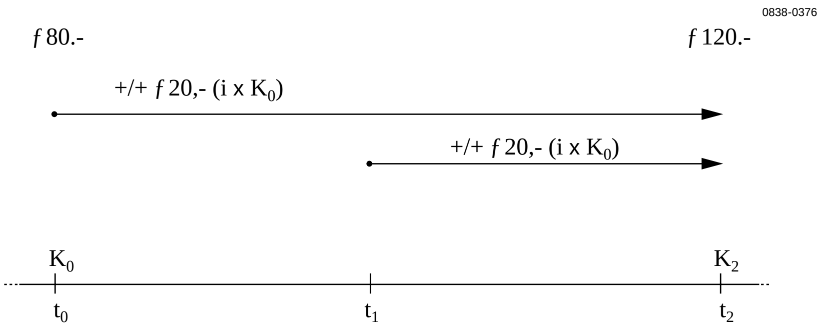
In algemene bewoordingen:
K_0 is de *huidige waarde* of *beginwaarde.* Verder in dit artikel zullen wij hiervoor het begrip contante waarde veel gebruiken.
K_1 is de *toekomstige waarde* of *eindwaarde.*
Interest is een percentage van de *beginwaarde* van een bedrag.
Disconto is een percentage van de eindwaarde van een bedrag.

Een opmerking in de trant van „u betaalt 10% rente” is om twee redenen onduidelijk. Allereerst moet de *renteperiode* worden vermeld, bijvoorbeeld 10% per jaar; vervolgens moeten de leningsvoorwaarden aangeven *over welk bedrag* men deze 10% berekent. Als een contract de voorwaarde „10% rente per jaar” vermeldt, betekent dit interest. In de praktijk gebruikt men de begrippen „interest” en „rente” (ten onrechte) door elkaar.

3. Renteformule

3.1. Enkelvoudige interest
De toevoeging *enkelvoudig* houdt in dat bij enkelvoudige renteberekening de rente aan het eind van iedere periode wordt „afgerekend”. Deze technische term betekent dat de rente in een volgende renteperiode *niet* in de renteberekening wordt betrokken.

Voorbeeld
Indien de geldgever (uit paragraaf 2.4.1.) zijn kapitaal (ƒ 80,—) nog een jaar bij de geldnemer laat staan, ontvangt hij voor de periode $t_1 - t_2$ weer ƒ 20,—



K_2 vindt men door de *beginwaarde* te vermeerderen met de interest die zowel over de eerste periode als over de tweede periode verschuldigd is.

De algemene relatie
$K_0 \times (1 + i) = K_1$
$f\ 80,— \times (1 + 0,25) = f\ 100,—$
kan men aanvullen tot
$K_0 \times (1 + n \times i) = K_n$
Waarbij n een gedeelte van een periode is, of meer perioden.

$K_0 \times (1 + 2 \times i) = K_2$
$f\ 80,— \times (1 + 2 \times 0,25) = f\ 120,—$

Indien er wel sprake is van samengestelde renteberekening houdt men wel rekening met de rente uit de vorige periode.

In dit voorbeeld, waar het interestpercentage 25 is, geldt
eindwaarde op t_1 = ƒ 80,— + ƒ 20,— (= 25% van ƒ 80,—) = ƒ 100,—
eindwaarde op t_2 = ƒ 100,— + ƒ 25,— (= 25% van ƒ 80,— + 25% van ƒ 20,—) = ƒ 125,—
Dus *rente-op-rente!*

3.2. De lineaire renteformule
Rente (R) is de prijs van het gebruik van kapitaal. De hoogte van de rentevergoeding is in principe afhankelijk van drie variabelen
– het uitstaande kapitaal (K);
– de hoogte van de rentevoet (p);
– de tijd die het kapitaal uitstaat (t).

Men hanteert voor de berekening van de hoogte van de rentevergoeding de volgende renteformule:

$$R = \frac{K \times p \times t}{C}$$

Op de „C” in deze formule komen wij hierna terug.

Deze *renteformule* geeft aan dat de rentevergoeding R *recht evenredig* (lineair) is met de rentevariabelen kapitaal (K), rentevoet (p) en tijd (t). Op het eerste oog lijkt deze rechtevenredigheid een logische zaak. Een auto, die zijn snelheid verhoogt van 50 km naar 100 km per uur, overbrugt vervolgens in eenzelfde tijd een afstand die tweemaal zo groot is als met de oorspronkelijke snelheid. Op basis van de rechtevenredigheid kan men de hoogte van een bepaalde renteopbrengst vertweevoudigen door
– *of een twee keer zo groot bedrag op rente uit te zetten;*
– *of te proberen een tweemaal zo hoog percentage te bedingen;*
– *of het geld eens zo lang rente te laten dragen.*

In de praktijk (wij komen daar op terug) blijkt echter dat de lineaire (rechtlijnige) relatie tussen de rentevergoeding en de rentevariabelen lang niet algemeen geldend is.

3.2.1. De constante C in de renteformule
De grootte van de constante C in de noemer van de renteformule is in feite afhankelijk van twee zaken:
1. of de rentevergoeding uitgedrukt is in een
   – percentage: C is dan 100;
   – promillage: C is dan 1000.

Deze waarden gelden onder een uitdrukkelijk *voorbehoud,* namelijk dat men de rente berekent over een periode die in *dezelfde tijdeenheid* is uitgedrukt als de renteperiode.

Voorbeeld
Een bedrag van ƒ 4.000,— staat gedurende een jaar rentedragend uit tegen 6%. De renteopbrengst (R) is

$$R = \frac{ƒ\,4.000,\text{—} \times 6 \times 1}{100} = ƒ\,240,\text{—}$$

De tijdeenheid „een jaar” is gelijk aan de tijdeenheid van de renteperiode, namelijk 6% *per jaar.* Een percentage op *jaarbasis* is gebruikelijk. In de praktijk komen afwijkingen voor. Indien de renteperiode geen jaar is, geeft men dat aan.

2. of de rentevergoeding berekend wordt over *een periode die afwijkt van de renteperiode*. Indien de gelijkheid er *niet* is moet men de rentevergoeding vermenigvuldigen met een factor waarin de verhouding tussen deze (kortere of langere) periode en de renteperiode tot uitdrukking komt.

Indien bovenstaande ƒ 4.000,— geen jaar, maar (slechts) 4 maanden uitstaat, moeten wij de rentevergoeding vermenigvuldigen met $^4/_{12}$. Men ontvangt dan geen ƒ 240,— maar $^4/_{12} \times$ ƒ 240,— = ƒ 80,—.

De looptijd is gegeven in maanden en de rentevoet per jaar.
Wij zien dus dat wij de noemer moeten vermenigvuldigen met 12. Afhankelijk van de perioden waarin men een jaar verdeelt zal de noemer in de renteformule $\frac{K \times p \times t}{C}$ de volgende waarden hebben:

jaar	$K \times {}^p/_{100} \times {}^t/_1$	$\rightarrow$	C = 100 t = aantal jaren
kwartaal	$K \times {}^p/_{100} \times {}^t/_4$	$\rightarrow$	C = 400 t = aantal kwartalen
maanden	$K \times {}^p/_{100} \times {}^t/_{12}$	$\rightarrow$	C = 1200 t = aantal maanden
weken	$K \times {}^p/_{100} \times {}^t/_{52}$	$\rightarrow$	C = 5200 t = aantal weken
dagen[1]	$K \times {}^p/_{100} \times {}^t/_{365}$	$\rightarrow$	C = 36.500 t = aantal dagen

1. Indien men het aantal dagen per jaar op 360 (12×30 dagen) stelt, is C = 36.000.

3.2.2. Voorbeeld renteformule en interest

Wekerom n.v. heeft 12 jaar geleden per 1 december een hypothecaire lening gesloten ten bedrage van ƒ 3.000.000,—. Men lost de lening lineair in 30 jaar af, de aflossingsdatum is 30 november. Twee jaar geleden is de rente herzien en vastgesteld op 6,9% per jaar, vooruit te betalen per 3 maanden (dus per 1 december, 1 maart, 1 juni en 1 september).

Op de balans en resultatenrekening van Wekerom n.v. komen met betrekking tot deze hypothecaire lening, onder andere, de volgende posten voor

- balans: vooruitbetaalde rente;
- resultatenrekening: rentekosten ten laste van het kalenderjaar.

Berekening bedrag op de balans
Op 31 december is (nog) vooruitbetaald voor de maanden januari en februari $\frac{2}{12} \times 6{,}9\%$ van ƒ 1.800.000,—.
In de renteformule

$$ƒ\ 1.800.000,\!— \times \frac{6{,}9}{100} \times \frac{2}{12} = ƒ\ 20.700,\!—$$

of

$$\frac{ƒ\ 1.800.000,\!— \times 6{,}9 \times 2}{1200} = ƒ\ 20.700,\!—.$$

Dit bedrag activeert men onder de transitoria/overige vorderingen.

Berekening bedrag op de resultatenrekening
De kosten die ten laste van de resultatenrekening komen, bedragen

$\frac{11}{12} \times 6{,}9\%$ van ƒ 1.900.000,— + $\frac{1}{12} \times 6{,}9\%$ van ƒ 1.800.000,—

In de renteformule

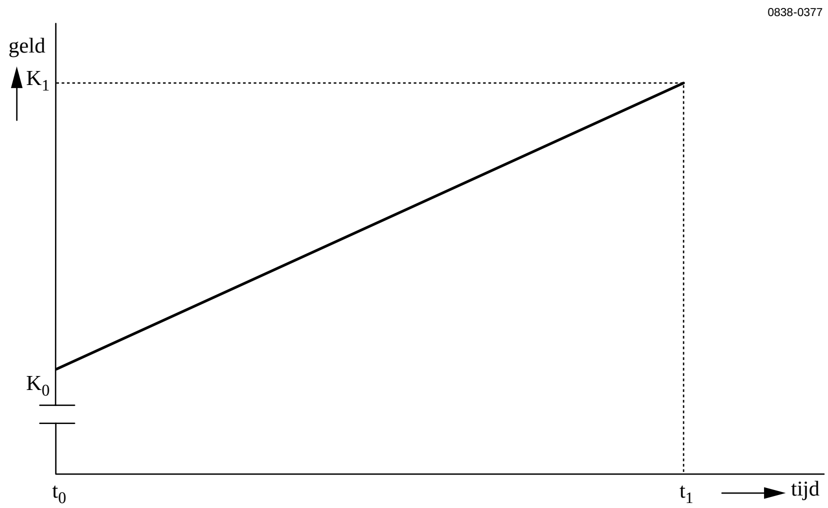
$$\frac{ƒ\ 1.900.000,\!— \times 6{,}9 \times 11}{1200} + \frac{ƒ\ 1.800.000,\!— \times 6{,}9 \times 1}{1200} =$$

$$\frac{ƒ\ 1.900.000,\!— \times 6{,}9 \times 11 + ƒ\ 1.800.000,\!— \times 6{,}9 \times 1}{1200} = ƒ\ 130.525,\!—$$

4. Samengestelde interest

4.1. Enkelvoudige interest
Hiervoor is de nadruk gelegd op een lineaire relatie tussen de hoogte van de rentevergoeding en de rentevariabelen: het kapitaal, het rentepercentage en de tijd.

Deze relatie, $R = \frac{K \times p \times t}{C}$, kan als volgt grafisch worden weergegeven.



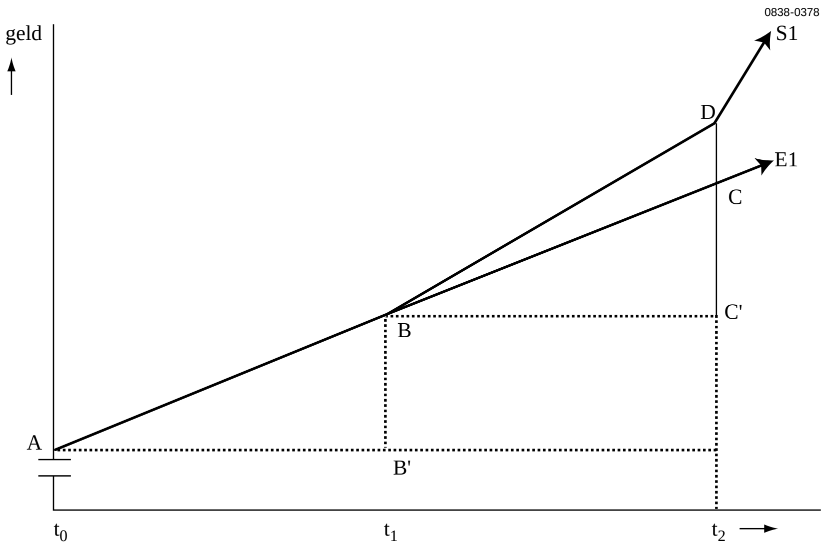
Figuur 1. De lineaire relatie tussen rente en rentevariabelen.

De rente gedurende de periode t_0-t_1 ter grootte van ƒ (K_1-K_0) vormt de basis voor de bepaling van de renteaanwas op elk willekeurig tijdstip binnen de renteperiode t_0-t_1; de berekening kan dan onder meer worden uitgevoerd door middel van (een in de grafiek duidelijk aan te brengen) *lineaire* interpolatie.

Een belangrijke beperking op de rechtlijnige relatie tussen rentevergoeding en rentevariabelen komt in de praktijk naar voren bij verschillen in de looptijd van het kapitaal en de lengte van de renteperiode.
Naar aanleiding van deze verschillen zijn er twee vragen.
In de eerste plaats de vraag: wat is het uitgangspunt voor de renteberekening in een volgende renteperiode indien de looptijd van een kapitaal de lengte van de desbetreffende renteperiode *overschrijdt?*
De *tweede* vraag luidt: Is er *binnen* een renteperiode altijd sprake van een lineair verband of is er ook een andere groeivorm mogelijk? Op deze vraag, naar de verdeling van de rentevergoeding binnen de renteperiode, komen wij in paragraaf 5 terug.

4.2. Het verschil tussen enkelvoudige en samengestelde interest
Wordt in renteperiode t_1-t_2 de te calculeren rentevergoeding opnieuw berekend over K_0, dan spreken we van *enkelvoudige interest* (EI): de rente wordt aan het einde van iedere renteperiode afgerekend. Het begrip „afgerekend” is een technische term om aan te duiden dat de rente in een volgende renteperiode niet in de interestbe-

rekening wordt betrokken. Indien echter in periode t_1-t_2 tevens rekening wordt gehouden met de rente uit renteperiode t_0-t_1, te weten $i \times K_0$, dan is de conditie *samengestelde interest* (SI): de rente wordt bij het kapitaal geteld om zo ook rentedragend te worden (rente op rente).



Figuur 2. Enkelvoudige en samengestelde interest.

Enkelvoudige interest ontwikkelt zich via de lijn AC, waarbij de rente in periode t_0-t_1 (BB!SA) gelijk is aan de rente in (de even grote) periode t_1-t_2 (CC!SA). In het geval van samengestelde interest zijn de punten A, B en D relevant, waarbij vanwege het effect van *rente op rente*, de renteaanwas in periode t_1-t_2 (DC!SA) groter is dan in periode t_0-t_1(BB!SA) en daarmee tevens groter dan de rente op basis van enkelvoudige interestberekening (CC!SA).
Wat is, wiskundig gezien, de aard van de samengestelde (rente op rente) constructie? Anders gezegd, op welke wijze onderscheidt de vergelijking die in het geval van samengestelde interest is te formuleren zich van de lineaire vergelijking bij enkelvoudige interest?
In het volgende voorbeeld geven wij een illustratie van het verschil tussen enkelvoudige interest en samengestelde interest.

Voorbeeld
Men heeft de beschikking over ƒ 10.000,—. Met dit bedrag kan men 6% per jaar rentende obligaties kopen in de plaatselijke sportvereniging SV Mathema tegen de uitgiftekoers van 100%. De verzilvering van de rente geschiedt op basis van halfjaarscoupons.
Men kan ook een lening verstrekken aan Pepiwi b.v. De rentevergoeding op deze lening is 3% SI per 6 maanden.
Bereken de waarde van het oorspronkelijke kapitaal, inclusief de renteaangroei na respectievelijk 6 maanden, 1 jaar, 1½jaar en 2 jaar voor beide beleggingsalternatieven.

Waarde van het kapitaal na	Samengestelde interest lening SV Mathema	Enkelvoudige interest obligaties Pepiwi b.v.
6 maanden	10.000 + 0,03 × 10.000 = 10.300	10.000 + 0,03 × 10.000 = 10.300
1 jaar	10.300 + 0,03 × 10.000 = 10.600	10.300 + 0,03 × 10.300 = 10.609
1½ jaar	10.600 + 0,03 × 10.000 = 10.900	10.609 + 0,03 × 10.609 = 10.927,27
2 jaar	10.900 + 0,03 × 10.000 = 11.200	10.927,27 + 0,03 × 10.927,27 = 11.255,09

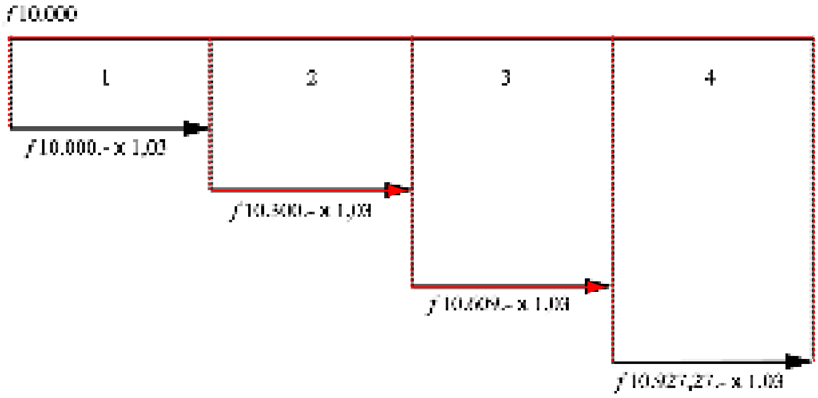
Bedragen in guldens

De interestvergoeding op de 6% obligaties SV Pepiwi bedraagt feitelijk 3% per halfjaar (halfjaarcoupons!). De totale renteaangroei in twee jaar is rechtstreeks te berekenen en bedraagt
4 × 0,03 × ƒ 10.000 = ƒ 1.200,—. De „eindwaarde” van ƒ 10.000,—, uitgezet tegen 3% EI per halfjaar, is derhalve ƒ 11.200,—. De bepaling van deze waarde kan natuurlijk ook met gebruikmaking van de lineaire renteformule:
$R = \frac{K \times p \times t}{C}$. Men vervangt deze notatie bij renteberekeningen voor meer dan één renteperiode wel door $R = K \times n \times i$; n is het symbool voor het aantal renteperioden.

Bij samengestelde interest is het verband tussen de beginwaarde ad ƒ 10.000,— en de eindwaarde ad ƒ 11.255,09 wat gecompliceerder. De waarde van ƒ 10.000,— na een half jaar wordt gevonden door bij het oorspronkelijke bedrag 3% op te tellen. Dit komt neer op het vermenigvuldigen met een factor 1,03; de eindwaarde na één renteperiode is derhalve ƒ 10.000,— × 1,03. Dit bedrag vormt het uitgangspunt voor de renteberekening in renteperiode 2, zodat de eindwaarde van ƒ 10.000,— na twee renteperioden
(ƒ 10.000,— × 1,03) × 1,03 = ƒ 10.000,— × $1{,}03^2$ bedraagt.
De omslachtige berekening van de eindwaarde na vier renteperioden in dit voorbeeld blijkt dus niet nodig te zijn. We kunnen deze

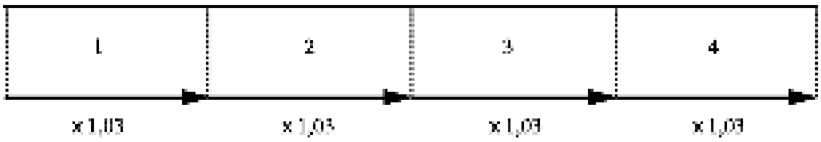
waarde rechtstreeks berekenen uit de beginwaarde door te vermenigvuldigen met de (exponentiële) factor $1{,}03^4 = 1{,}12550881$.
In schema:

0838-0379



Deze viertrapsraket in eenvoudiger vorm ziet er als volgt uit:

0838-0380



ƒ 10.000,— × 1,03 × 1,03 × 1,03 × 1,03 =
ƒ 10.000,— × $1{,}03^4$ = ƒ 10.000,— × 1,12550881 = ƒ 11.255,09.

4.3. De berekening van eindwaarden

De nu volgende opstelling illustreert hoe een formule kan worden ontwikkeld die algemeen geldend is voor berekeningen met samengestelde interest.
Uitgangspunt is een kapitaal ter grootte van C, het meer algemene symbool voor *contante waarde* of *beginwaarde.* Dit bedrag staat gedurende n renteperioden uit tegen p% per periode. De beginwaarde, het kapitaal C, is het bedrag aan het *begin* van een renteperiode. Verder komen voorlopig gebroken en niet-gehele renteperioden niet aan de orde. De vraag is nu hoe groot de *equivalente waarde* van C is na n perioden en op welke wijze de ene waarde uit de andere waarde is te berekenen. De waarde na n perioden wordt aangeduid met het symbool E_n, staande voor *eindwaarde* of *toekomstige waarde.*
Equivalentie is de gelijke waardering – de gelijkwaardigheid – van

kapitalen die op verschillende tijdstippen vervallen. Deze gelijke waardering is het gevolg van een rentevergoeding.

periode	beginkapitaal	+ rente	= eindkapitaal	
1	C	+ iC	= C + iC	= C (1 + i) = E_1
2	C (1 + i)	+ iC (1 + i)	= (C + iC)(1 + i)	= C $(1 + i)^2$ = E_2
3	C $(1 + i)^2$	+ iC $(1 + i)^2$	= (C + iC)$(1 + i)^2$	= C $(1 + i)^3$ = E_3
n − 1	C $(1 + i)^{n-2}$	+ iC $(1 + i)^{n-2}$	= (C + iC)$(1 + i)^{n-2}$	= C $(1 + i)^{n-1}$ = $E_{n\ -1}$
n	C $(1 + i)^{n-1}$	+ iC $(1 + i)^{n-1}$	= (C + iC)$(1 + i)^{n-1}$	= C $(1 + i)^n$ = E_n

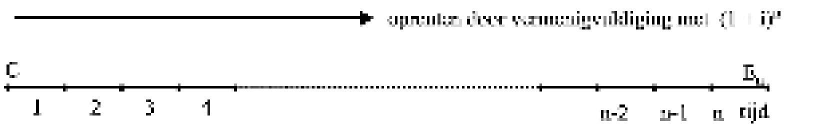
Figuur 3. De ontwikkeling van kapitalen op basis van SI.

De (met de verschenen rente vergrote) *kapitalen* vormen, evenals trouwens de opeenvolgende interestbedragen, een *meetkundige rij.* De reden van zo’n rij, de factor waarmee elke term wordt vermenigvuldigd om de volgende term van de rij te berekenen, is de *interestfactor* (l + i). Het verband tussen de equivalente kapitaalwaarden is een *exponentiële relatie.*
Met behulp van deze eigenschap van samengestelde interest is het mogelijk een kapitaal een willekeurig aantal renteperioden op te renten en wel volgens:

$$\boxed{E_n = C\ (l + i)^n}$$

Oprenten is de waardering van een kapitaal over een aantal renteperioden. De formule $E_n = C\ (1 + i)^n$ is de *formule van de eindwaarde.*

0838-0381



Figuur 4. Eindwaardeberekening.

Voor de berekening van eindwaarden hanteerde men tot voor kort een *interesttafel* en wel de zogenaamde S_{np}-*tafel* (spreek uit: grote s enpee).
Wij komen daar in paragraaf 4.5 kort op terug.
Het gebruik van interesttafels is, ten gevolge van de verspreiding van elektronische zakrekenmachines op grote schaal, geheel overbodig

geworden. Zelfs de eenvoudigste rekenmachines hebben een functietoets voor machtsverheffen: y^x. Met deze toets kunnen we de interestfactor (1 + i) tot elke gewenste macht verheffen, ten einde een kapitaal een aantal renteperioden op te renten.
Zo kunnen we met de calculator de waarden controleren die in onderstaande folder voorkomen.

0838-0382

ABN Groeikasbiljetten tot 7¾%

- waardepapier
- vrij overdraagbaar tussen particulieren
- rentevergoeding over geheel verstreken jaren op basis van samengestelde interest
- reeds na 2 jaar dagelijks te verzilveren
- aankoopprijs ƒ 1.000,- (en ƒ 10.000,-)

ABN Groeikasbiljetten

bij inwisseling	waarde	rente
na 2 jaar	ƒ 1.118,31	5¾%
na 3 jaar	ƒ 1.199,46	6¼%
na 4 jaar	ƒ 1.310,80	7%
na 5 jaar	ƒ 1.452,40	7¾%

Figuur 5. Uit de folder: „Sparen en beleggen" van de ABN-Bank.

De antwoorden zijn:

E_2 = ƒ 1.000,— × $1{,}0575^2$ = ƒ 1.000,— × 1,11830625 = ƒ 1.118,31
E_3 = ƒ 1.000,— × $1{,}0625^3$ = ƒ 1.000,— × 1,199462891 = ƒ 1.199,46
E_4 = ƒ 1.000,— × $1{,}07^4$ = ƒ 1.000,— × 1,31079601 = ƒ 1.310,80
E_5 = ƒ 1.000,— × $1{,}0775^5$ = ƒ 1.000,— × 1,452400515 = ƒ 1.452,40

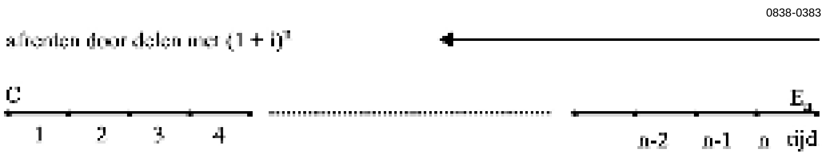
4.4. De berekening van beginwaarden

In de vorige paragraaf is een formule ontwikkeld die de relatie tussen de (begin)waarde van een kapitaal C en de (eind)waarde een aantal renteperioden later weergeeft: $E_n = C\,(1 + i)^n$. De relatie geldt ook voor de omgekeerde berekeningsgang. De formule luidt dan, in herschreven vorm:

$$C = \frac{E_n}{(1+i)^n}$$

Deze uitdrukking noemt men wel de *formule voor de beginwaarde of contante waarde.*

Met deze formule kan men de huidige waarde berekenen van een kapitaal dat pas over een aantal renteperioden vervalt.
Naar analogie van het begrip „oprenten” noemt men deze bewerking *afrenten.*



Figuur 6. Contante-waardeberekening

In het voorgaande is gekozen voor het begrip „afrenten”. In de financiële praktijk spreekt men in geval van *contante-waardebepaling* ook over het *(ver)disconteren* van toekomstige bedragen.
Dit begrip kan de indruk wekken dat hierbij met discontopercentages wordt gerekend, maar die suggestie is *onjuist*. Slechts zeer incidenteel is bij samengestelde renteberekeningen disconto aan de orde.
Wij hebben zelf een lichte voorkeur voor het begrip „afrenten”, mede omdat in deze term ligt opgesloten dat voor de bepaling van huidige waarden de rente uit toekomstige bedragen moet worden gelicht. Toch zullen we in de praktijk ook het begrip „verdisconteren” tegenkomen, terwijl geen sprake is van disconto- maar van interestpercentages.
Financiële rekenaars gebruiken in plaats van de begrippen „oprenten” en „afrenten” ook het begrip *„valuteren”*. Deze (neutrale) term hangt samen met het *valutamoment*, dit is het tijdstip waarop een bedrag vervalt.
Ten einde de berekeningen die samenhangen met het afrenten van bedragen te vereenvoudigen, heeft men in het verleden de interesttafel A_{np} spreek uit: grote a enpee) ontwikkeld.

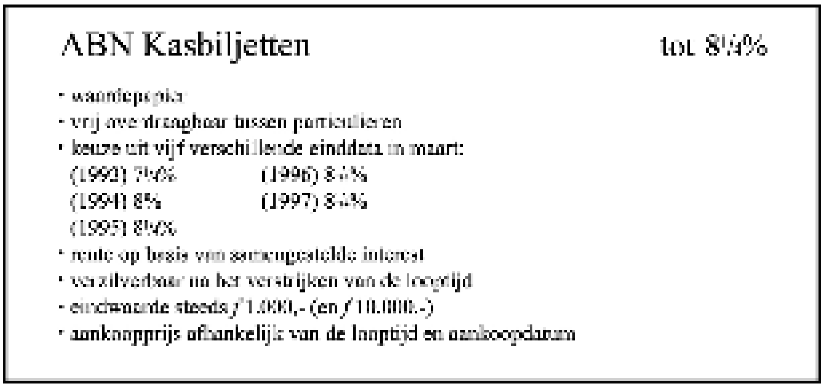
Wij kunnen de afrentingsfactor $\frac{1}{(1 + i)^n}$ opnieuw eenvoudig met de rekenmachine berekenen.

Dit kan bijvoorbeeld als volgt:
– bepaal eerst de waarde van $(1 + i)^n$ met de functietoets y^x;
– maak vervolgens gebruik van de functietoets 1/x, waarbij x de berekende waarde y^x is.

Voorbeeld
We berekenen de aankoopprijs van een ABN-Kasbiljet met een

eindwaarde van ƒ 1.000,— voor elk van de onderstaande einddata indien de aankoop plaatsvindt in maart 1991.
We gaan hierbij uit van gehele renteperioden; met andere woorden, de looptijd bedraagt respectievelijk 2 jaar (7,25%), 3 jaar (8%) enzovoorts.

0838-0384



Figuur 7. Bron: „Sparen en beleggen”.

De berekeningen zijn:

$$C_{(2)} = f\ 1.000,\!— \times \frac{1}{1{,}0725^2} = f\ 1.000,\!— \times 0{,}869371\ldots = f\ 869{,}37$$

$$C_{(3)} = f\ 1.000,\!— \times \frac{1}{1{,}08^3} = f\ 1.000,\!— \times 0{,}793832\ldots = f\ 793{,}83$$

$$C_{(4)} = f\ 1.000,\!— \times \frac{1}{1{,}0825^4} = f\ 1.000,\!— \times 0{,}728263\ldots = f\ 728{,}26$$

$$C_{(5)} = f\ 1.000,\!— \times \frac{1}{1{,}0825^5} = f\ 1.000,\!— \times 0{,}672760\ldots = f\ 672{,}76$$

$$C_{(6)} = f\ 1.000,\!— \times \frac{1}{1{,}0825^6} = f\ 1.000,\!— \times 0{,}621487\ldots = f\ 621{,}49$$

4.5. Rentetafels en rekenmachine

De waarde van de *oprentingsfactor* $(l + i)^n$ en de *afrentingsfactor* $\frac{1}{(l + i)^n}$ zijn in het verleden traditioneel bepaald met behulp van zo genaamde *rentetafels.* Ons nijvere voorgeslacht heeft namelijk ten behoeve van allerlei financiële calculaties een aantal interest- en discontotafels ontwikkeld. Twee ervan behandelen wij in de volgende paragrafen.

4.5.1. De S_{np}-tafel

In de eerste interesttafel, de S_{np}-*tafel* (spreek uit: grote s enpee), zijn waarden af te lezen met betrekking tot de factor $(l + i)^n$. De betekenis van het symbool S_{np} is de (eind)waarde na n renteperioden van één kapitaaleenheid (in casu ƒ 1,—) uitgezet tegen p% samengestelde interest per periode.

Ter illustratie volgt een gedeelte van een S_{np}-tafel en daaraan gekoppeld een voorbeeld van traditoneel tafelgebruik.

n	p			
	8,125	8,25	8,375	8,5
1	1,08125	1,0825	1,08375	1,085
2	1,169101562	1,17180625	1,174514062	1,177225
3	1,264091064	1,268480266	1,272879615	1,277289125
4	1,366798463	1,373129888	1,379483283	1,385858701
5	1,477850839	1,486413103	1,495015008	1,503656690
6	1,597926219	1,609042184	1,620222515	1,631467509
7	1,727757725	1,741788164	1,755916151	1,770142247

Figuur 8. Fragment uit S_{np}-tafel.

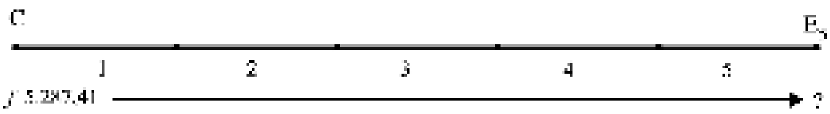
S_{np} is het symbool voor de oprentingsfactor $(1 + i)^n$. De formule voor de berekening van de eindwaarde $E_n = C\ (1 + i)^n$ komt men in de literatuur dan ook vaak tegen in de vorm $E_n = C \times S_{np.}$

Zo betekent ƒ 1.000,— × $S_{58,375}$ de waarde van ƒ 1.000,— na 5 jaar wanneer de rente 8,375% per jaar bedraagt.

Voorbeeld

Wij berekenen met gebruikmaking van de gegeven tafelwaarden de waarde van een huidig bedrag ad ƒ 5.287,41 over 5 jaar indien de rente 8,375% per jaar bedraagt.

0838-0385



$$E_5 = ƒ\ 5.287,41 \times 1,08375^5 = ƒ\ 5.287,41 \times S_{\overline{5}|8,375} =$$
$$ƒ\ 5.287,41 \times 1,495015008 = ƒ\ 7.904,76$$

4.5.2. De A_{np}-tafel

Voor de afrentingsfactor $\frac{1}{(1+i)^n}$ zijn de zogenaamde A_{np}-*tafels* berekend: in deze A_{np}-tafels is te vinden de contante waarde van één kapitaaleenheid, vervallende na n renteperiode, berekend tegen p% samengestelde interest per periode.

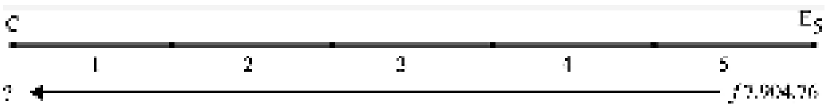
n	p			
	8,125	8,25	8,375	8,5
1	0,9248554913	0,9237875289	0,92272203	0,9216589862
2	0,8553576798	0,8533833985	0,8514159446	0,8494552868
3	0,9710822473	0,7883449409	0,7856202488	0,7829080984
4	0,7316367605	0,7282632248	0,7249091108	0,7215742843
5	0,6766582756	0,6727604848	0,6688896062	0,6650454233
6	0,6258111219	0,6214877458	0,6171991753	0,6129450906
7	0,5787848526	0,5741226289	0,5695032759	0,5649263508

Figuur 9. Fragment uit A_{np}-tafel.

Voorbeeld

Wij berekenen met gebruikmaking van de gegeven tafelwaarden de waarde van een bedrag ad ƒ 7.904,76 dat over 5 jaar vervalt indien de rente 8,375% per jaar bedraagt.

0838-0386



$$C = ƒ\ 7.094,76 \times \frac{1}{1,08375^5} = ƒ\ 7.094,76 \times A_{\overline{5}|8,375} =$$
$$ƒ\ 7.094,76 \times 0,6688896062 = ƒ\ 5.287,41.$$

Formule is symboolvorm.

A_{np} is het symbool voor de afrentingsfactor $\frac{1}{(1 + i)^n}$

De formule voor de berekening van de contante waarde $C = \frac{E_n}{(1+i)\text{-}n}$

kan derhalve ook worden geschreven als $C = E_n \times Anp$.

Zo betekent ƒ 1.000,— × A58,375 de huidige waarde van ƒ 1.000,— die over 5 jaar vervalt, bij een rentevergoeding van 8,375% per jaar.

4.5.3. Verband tussen Snp (-tafel) en Anp (-tafel)

Aangezien A_{np} (= $(l + i)^n$) en A_{np} (= $\frac{1}{(1 + i)^n}$) elkaars reciproken zijn, levert de vermenigvuldiging van deze symbolen bij substitutie van een gelijke p- en een gelijke n-waarde altijd een uitkomst op van (ongeveer) 1.
We passen dit toe op de berekeningen in de voorafgaande voorbeelden.
E_5 = ƒ 5.287,41 × S58,375 (1,495015008) = ƒ 7.904,76
C = ƒ 7.904,65 × A58,375 (0,6688896062) = ƒ 5.287,41

$$S58{,}375 \times A58{,}375 = 1{,}08375^5 \times \frac{1}{1{,}08375^5} = 1$$

$$\text{en algemeen: } S_{np} \times A_{np} = (1 + i)^n \times \frac{1}{(1 + i)^n} = 1$$

Duidelijk is dat de contante-waardeberekening de omgekeerde bewerking is van eindwaardeberekening.

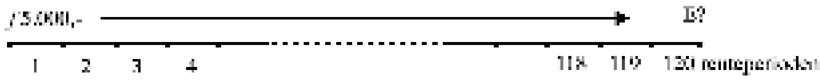
4.5.4. Het gebruik van rekenapparatuur

Contante-waarde- en eindwaardeberekeningen kunnen met een eenvoudige rekenmachine worden uitgevoerd. Het directe voordeel daarvan is dat het tijdrovende opzoeken in een boek van de desbetreffende tafelwaarden niet meer nodig is. Maar essentiëler is het voordeel dat we met het elektronische rekentuig niet meer gebonden zijn aan de beperkingen van de rentetafels.
Deze beperkingen hebben betrekking op de twee tafelvariabelen n en p.
In het geval van n was het *beperkte aantal renteperioden in een rentetafel* althans nog te ondervangen door bij overschrijding van de

tafelmogelijkheden één van de eigenschappen van machten te gebruiken.

Voorbeeld
Tien jaar geleden is een prima-spaarrekening geopend waarop ƒ 5.000,— is gestort. De renteconditie is 0,5% SI per maand.
Veronderstel dat men nu de eindwaarde van het gestorte bedrag wil berekenen op grond van een rentetafel met als maximum 100 renteperioden.
In formulevorm bedraagt de eindwaarde:
E_{120} = ƒ 5.000,— × $S_{1200,5}$.

0838-0387



S1200,5 is niet in de rentetafel opgenomen: de maximale waarde is namelijk $S_{1000,5}$.
$s_{1200,5}$ is het symbool voor $(1 + 0,005)^{120}$; deze waarde is te splitsen in $1,005^{100} \times 1,005^{20}$ of in $1,005^{80} \times 1,005^{40}$ enzovoorts, en in symboliek $S_{1000,5} \times S_{200,5}$ respectievelijk $S_{200,5} \times S_{400,5}$ enzovoorts.
Het is dan alsnog mogelijk de gevraagde eindwaarde te berekenen door de gekozen tafelwaarden op te zoeken en met elkaar te vermenigvuldigen.
ƒ 5.000,— × $S_{1200,5}$ = ƒ 5.000,— × $S_{1000,5} \times S_{200,5}$ =
ƒ 5.000,— × 1,646668492 × 1,104895577 = ƒ 9.096,98.
En dan te bedenken dat al deze berekeningen (vroeger) met de hand moesten worden becijferd!

Een veel zwaarder wegende beperking in de rentetafels is *de discontinuïteit in de tafelpercentages:* sommige rentetafels werken met sprongen van 0,25% of zelfs 0,5%; andere tafels verspringen met ten minste 0,125%. De rekenmachine maakt het echter mogelijk berekeningen te maken met de sterk verfijnde percentages die zich in de dagelijkse praktijk voordoen.

5. Renteberekeningen met één geldbedrag

In het geval van renteberekeningen op basis van samengestelde interest voor één kapitaal kunnen zich praktisch gezien *vier vragen* voordoen. Deze zijn in het volgende schema gesystematiseerd. We zullen deze vragen echter eerst in een praktische situatie aangeven.

0838-0388

Situatie	*Variabele*				*Probleemstelling*
	C	F	n	E	
1	x	x	x	?	$E_n = C \times (1+i)^n$
2	?	x	x	x	$C = E_n \times \frac{1}{(1+i)^n}$
3	x	x	?	x	$(1+i)^k < \frac{E_n}{C} < (1+i)^{k+1}$
4	x	?	x	x	$(1+i)^n < \frac{E_n}{C} < (1+i+j)^n$

1. Iemand heeft de beschikking over een bepaald bedrag dat hij voor langere tijd rentedragend uitzet, bijvoorbeeld door het kopen van beleggingsbewijzen. De variabelen C – de koopprijs van de beleggingsbewijzen –, p en n – de interestvoet op en de looptijd van de beleggingsbewijzen – liggen daarmee vast. Hij kan dan berekenen welk bedrag (E) hij *na het verstrijken van de looptijd* van de beleggingsbewijzen in handen krijgt.
   Een voorbeeld voor dit probleem zijn de ABN-Groeikasbiljetten (zie par. 4).
2. Dit is een variant op de eerste situatie. De eindwaarde is gegeven en de *hoeveelheid huidige guldens* die equivalent zijn met deze eindwaarde wordt gevraagd.
   Als illustratie kunnen de ABN-Kasbiljetten (zie par. 4) dienen.
3. Hoe lang duurt het voordat een bedrag *een gewenste waarde bereikt* als het rentedragend uitstaat tegen een vast percentage? Dit probleem doet zich in de praktijk niet zoveel voor, althans niet met één kapitaal. U kunt (bij meer bedragen) denken aan het verschijnsel van de zogenoemde doelbesparingen: een jongen spaart voor een home-computer en stort elke week een bedrag op zijn junior-spaarrekening.

4. Vaker echter zal er in de praktijk de behoefte zijn om *de variabele p te berekenen.* Bijvoorbeeld de berekening van het rendement op een belegging.
   P. Cunia kocht op 8 december tien 12,5% obligaties Nederland voor ƒ 10.779,73. Hij verkocht deze obligaties weer op 27 september; de netto-opbrengst bedroeg ƒ 12.017,13. Tevens verzilverde hij de coupon die op 1 oktober verviel en ontving na aftrek van de *couponprovisie* ƒ 1240,62.

5.1. Berekening van de eindwaarde

Voorbeeld
D. O. Moor heeft 28 jaar geleden een lening gesloten onder de renteconditie 2% SI per kwartaal. De lening bedroeg destijds ƒ 2500,—.
D. O. Moor moet nu (28 jaar later) de lening inclusief de verschuldigde rente terugbetalen. Destijds had D. O. Moor een gebrekkige vooropleiding en beschikte hij over een rentetafel met maximaal 100 renteperioden.
Omdat hij van mening was dat 2% per kwartaal equivalent is met 8% per jaar berekende hij met behulp van zijn rentetafel de terugbetaling met het jaarpercentage.
D. O. Moor bestudeert sinds kort de juiste literatuur voor het renterekenen en weet nu wel beter.
Hoeveel moet hij extra betalen ten opzichte van zijn oorspronkelijke berekening?

$E_{31\text{-}12\text{-}28\ (\text{contract})} = ƒ\ 2500,\text{—} \times 1{,}02^{112}\ (9{,}187962994) = ƒ\ 22.969{,}91$

$E_{31\text{-}12\text{-}28(\text{D.O.Moor})} = ƒ\ 2500,\text{—} \times 1{,}08^{28}\ (8{,}627106386) = ƒ\ 21.567{,}77$

De vergissing in zijn nadeel bedraagt ƒ 1402,14

5.2. Berekening van de beginwaarde

Voorbeeld
Een belegger wil begin april 1989 een obligatie van ƒ 1000,— nominaal kopen die behoort tot de 5,25% obligatielening NV Bank voor Nederlandsche Gemeenten 65 per 71-90.
Toelichting: uit de omschrijving van de lening kunnen we afleiden dat de BNG in 1965 5,25% rentende obligaties heeft geëmitteerd die lineair worden afgelost in de jaren 1971 tot en met 1990; dus elk jaar

5% van de oorspronkelijke lening. Jaarlijks wordt door loting bepaald welke obligaties voor aflossing in aanmerking komen.
Na de *uitloting* in 1989 is zeker dat de resterende obligaties in 1990 aflosbaar worden gesteld.
De *koers* van deze obligatielening op de Amsterdamse effectenbeurs bedraagt – een jaar voor de laatste aflossing – 98,3%; een obligatie kost dan ƒ 983,—.
De belegger wil een rente op jaarbasis van 7,2%. Gaat hij tot aankoop over?
De belegger is bereid voor een obligatie maximaal de contante waarde van ƒ 1000,— aflossing en ƒ 52,50 (5,25% van ƒ 1000,—) rente te betalen.
Beide bedragen vervallen over een jaar zodat geldt:
maximale koopprijs =
ƒ 1052,50 × $1{,}072^{-1}$ = ƒ 1052,50 × 0,93283582 = ƒ 981,81,
hetgeen minder is dan de huidige beursprijs.
De belegger koopt dus niet!

5.3. Berekening van de looptijd

Bij berekeningen van looptijden en rentepercentages kunnen rentetafels een rol blijven spelen. De variabelen n en p zijn namelijk tafelvariabelen; zie figuren 8 en 9 in paragraaf 4.

Voorbeeld

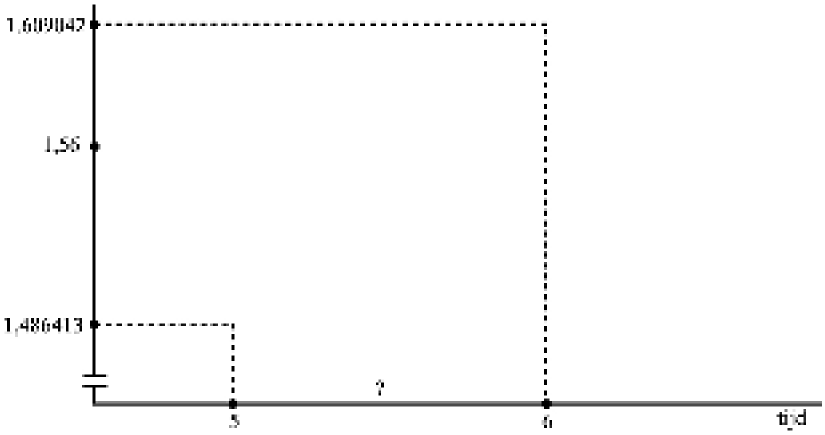
Een bedrag van ƒ 10.000,— staat uit tegen 8,25% interest per jaar en is inmiddels aangegroeid tot ƒ 14.864,13.
Dan geldt
ƒ 10.000,— × $1{,}0825^n$ = ƒ 14.864,13 en $1{,}0825^n$ (= $S_{n8,25}$) = 1,486413.
In de S_{np}-tafel (zie fig. 8) treft u op de snijding van p = 8,25 en n = 5 de berekende waarde 1,486413103 aan.
De aangroei is dus na 5 jaar bereikt.

In het voorbeeld bleek een rentetafel alsnog bruikbaar voor de berekening van een aantal perioden, maar dan wel, zult u zeggen, bij de gratie van een „mooi" voorbeeld. Want het zal een hoge uitzondering zijn dat de berekende waarde in de rentetafel is terug te vinden. De bepaling van de tijd die nodig is om een bedrag van ƒ 10.000,— te laten aangroeien tot ƒ 15.600,— onder de renteconditie 8,25% SI is moeilijker.

De tafelwaarde 1,56 (= ƒ 15.600,—: ƒ 10.000,—) komt niet in de kolom 8,25 voor. De conclusie is dat de S_{np}-tafel slechts aangeeft dat

het tijdstip waarop ƒ 15.600,— wordt bereikt ergens in het zesde jaar ligt. De rentetafel geeft alleen de grenzen aan. De vraag hoe we binnen deze grenzen moeten en kunnen interpoleren, beantwoorden we in paragraaf 5.6.
Zie voor deze problematiek nog eens figuur 10.

0838-0389



Figuur 10. Bepaling van de looptijd.

Logaritmische oplossing leidt tot de volgende opstelling:

$$1{,}0825^n = \frac{ƒ\ 15.600,—}{ƒ\ 10.000,—} \text{ — } n \log 1{,}0825 = \log 1{,}56$$

$$\text{zodat } n = \frac{\log 1{,}56}{\log 1{,}0825} = \frac{0{,}1931245984}{0{,}034427905} \text{ —}$$

n = 5,6095; n = (5 − 0,6095 × 365) jaar = 5 jaar en 223 dagen.

Vraag
Een kapitaal ad ƒ 3000,— staat uit tegen 3% SI per jaar en is inmiddels aangegroeid tot ƒ 6000,—.
In welk jaar is dit het geval?
Maak bij de beantwoording gebruik van de volgende rentetafel.

0838-0390

$S_{\overline{n}|p} = (1 + p/100)^n$

N \ p	2.625	2.750	2.875	3.000
1	1,026250000	1,027500000	1,028750000	1.030000000
2	1.053189062	1.055756250	1.058326562	1.060900000
3	1.080835275	1.084789547	1.088753451	1.092727000
4	1.109207201	1.114621259	1.120055113	1.125508810
5	1.138323890	1.145273344	1.152256697	1.159274074
6	1.168204893	1.176769361	1.185384077	1.194052297
7	1.198870271	1.209120491	1.219463870	1.229273865
8	1.230340616	1.242380552	1.254523456	1.266770081
9	1.262637057	1.276546017	1.290591805	1.304773184
10	1.295781279	1.311651033	1.327695497	1.343916379
11	1.329795538	1.347721436	1.365866742	1.384233871
12	1.364703671	1.384783775	1.405135411	1.425760887
13	1.408526116	1.422865329	1.445533854	1.468533713
14	1.437289927	1.461994126	1.487092129	1.512589725
15	1.475018787	1.502198964	1.529846028	1.557967417
16	1.513738030	1.543509436	1.573829101	1.604706439
17	1.553473654	1.585955945	1.619076688	1.652847632
18	1.594252337	1.629569734	1.665625143	1.702433061
19	1.636101461	1.674383901	1.713511866	1.753506053
20	1.679049124	1.720428431	1.762775332	1.806111235
21	1.723124164	1.767740213	1.813455123	1.860294572
22	1.768356173	1.816353069	1.865591957	1.916103409
23	1.814775523	1.866302778	1.919227726	1.973586511
24	1.862413380	1.917626105	1.974405523	2.032794106
25	1.911301731	1.970360823	2.031169682	2.093777930
26	1.961473402	2.024545745	2.089565811	2.156591268
27	2.012962079	2.080220753	2.149640828	2.221289006
28	2.065803333	2.137426824	2.211443001	3.287927676
29	2.120029644	2.196206062	2.275021988	2.356565506
30	2.175680422	2.256601728	2.340428870	3.427262471
31	2.232792034	2.318658276	2.407716200	2.500080345
32	2.291402824	2.382421379	2.476938041	2.575082756
33	2.351552149	2.447937966	2.548150009	2.652335238
34	2.413280392	2.515250260	2.621409322	2.731905296
35	2.476629003	2.584425806	3.696774841	3.813862454
36	2.541640314	2.655497517	2.774307117	2.898272328
37	2.608358570	2.728523699	2.854068446	3.985226678
38	2.676827990	2.803558101	2.936122914	3.074783478
39	2.747094725	2.880655949	3.020536448	3.167026933
40	2.819205962	2.959873987	3.107376871	3.262037792
41	2.893210118	3.041270522	3.196713956	3.359838926
42	2.969156884	3.124905461	3.288619482	3.460695894
43	3.047097252	3.210840361	3.383167292	3.564516770
44	3.127083555	3.299138471	3.480433352	3.671452273
45	3.209169498	3.389864779	3.580495811	3.781595842
46	3.293410397	3.483086061	3.689435065	3.895013717
47	3.379862215	3.578870927	3.789333823	4.011895028
48	3.468582598	3.677289878	3.898277171	4.132251879
49	3.559633918	3.778415349	4.010352639	4.256219436
50	3.653074308	3.882321772	4.125650278	4.383906019

De op te lossen vergelijking is ƒ 3000,— × $1{,}03^n$ = ƒ 6000,—, ofwel $1{,}03^n = 2$.
Bij raadpleging van een rentetafel blijkt n te liggen tussen 23 en 24 jaar: $1{,}03^{23}$ (1,973586511) < 2 < $1{,}03^{24}$ (2,032794106).

Logaritmische oplossing leidt tot $n = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}03} = 23{,}44977\ldots$

De verdubbeling van het oorspronkelijke kapitaal zou dan zijn bereikt na 23 jaar + 0,44977 × 365 dagen = 23 jaar en (164,166 afgerond) 165 dagen.
De vraag of dit exact berekende antwoord ook juist is, zullen we in paragraaf 5.6 van deze les beantwoorden.

In het voorgaande is in feite de vraag beantwoord in hoeveel jaar een kapitaal verdubbelt. In de financiële rekenkunde kennen we hiervoor een vuistregel, die in ieder geval aardig werkt voor lage rentepercentages.

We doelen hier op de zogenoemde *verdubbelingsformule* $\dfrac{70}{p}$.

Bij substitutie van p is 3% blijkt de formule tot hetzelfde antwoord te leiden als via de rentetafel:

$\dfrac{70}{3}$ = 23,. . . . jaar.

5.4. Berekening van de rentevoet

We zullen de berekening van de rentevoet eerst benaderen op dezelfde wijze als de looptijd, namelijk door het vaststellen van grenswaarden met behulp van een rentetafel.

Voorbeeld

Een spaarbiljet van ƒ 7500,— groeit in 5 jaar op samengestelde interest aan tot ƒ 12.000,—. Geef aan tussen welke percentages het rendement op het spaarbiljet ligt; u kunt gebruik maken van de volgende rentetafel.

0838-0391

$S_{N\,p} = (1 + p/100)^N$

N \ P	9.625	9.750	9.875	10.000
1	11096250000	1.097500000	1.098750000	1.100000000
2	1.201764062	1.204506250	1.207251262	1.210000000
3	1.317434854	1.321945609	1.326467654	1.331000000
4	1.444236862	1.450835306	1.457456335	1.461100000
5	1.583244660	1.592291749	1.601380148	1.610510000
6	1.735631958	1.717540191	1.759516138	1.771561000
7	1.902686534	1.917923363	1.933268686	1.948717100
8	2.085820113	2.104923086	2.124178969	2.143588810
9	2.286580299	2.310353087	2.333941642	2.357947691
10	2.506663653	2.535393013	2.564418379	2.593742460
11	2.747930030	2.782593832	2.817654694	2.853116706
12	3.012418295	3.053896730	3.095898095	3.138428377
13	3.302363556	3.351651661	3.401618032	3.452271214
14	3.620216048	3.678437698	3.737527813	3.797498336
15	3.968661843	4.037085374	4.106608684	4.177248169
16	4.350645545	4.430701198	4.512136292	4.504972986
17	4.769395179	4.862694565	4.957709751	5.054470285
18	5.228449465	5.336807285	5.447283589	5.559917313
19	5.731687726	5.857145995	5.985202843	6.115909045
20	6.283362669	6.428217729	6.576241624	6.727499949
21	6.888156326	7.054968958	7.225645484	7.400249944
22	7.551119448	7.742828432	7.939177976	8.140274939
23	8.277914695	8.497754204	8.723171801	8.954302433
24	9.074663984	9.326285238	9.584585016	9.849732676
25	9.948100392	10.23559805	10.53106279	10.83470594
26	10.90560506	11.23356886	11.57100524	11.91817654
27	11.95526954	12.32884182	12.71364200	13.10999419
28	13.10596424	13.53090390	13.96911415	14.42099361
29	14.36741329	14.85016703	15.34856417	15.86309297
30	15.75027682	16.29805832	16.86423489	17.44940227
31	17.26624097	17.88711900	18.52957808	19.19434250
32	18.92811666	19.63111310	20.35937392	21.11377675
33	20.74994789	21.54544663	22.36986209	23.22515442
34	22.74713037	23.64579843	24.57888597	25.54766986
35	24.93654167	25.95126378	27.00605096	28.10243685
36	27.33668381	28.48151199	29.67289849	30.91268053
37	29.96783962	31.25845941	32.60309722	34.00394859
38	32.85224419	34.30615921	35.82265307	37.40434344
39	36.01427269	37.65100973	39.36014006	41.14477779
40	39.48064641	41.32198318	43.24695389	45.25925557
41	43.28065865	45.35087654	47.51759059	49.78518112
42	47.44642205	49.77258700	52.20995266	54.76369924
43	52.01314017	54.62541423	57.36568549	60.24006916
44	57.01940491	59.95139212	63.03054693	66.26407608
45	62.50752264	65.79665385	69.25481344	72.89048369
46	68.52387169	72.21182650	76.09372626	80.17953205
47	75.11929434	79.25247959	83.60798173	88.19748526
48	82.34952642	86.97959635	91.86426993	97.01723378
49	90.27566834	95.46010699	100.9358666	106.7189572
50	98.96470142	104.7674674	110.9132834	117.3908529

De gegevens leiden tot de vergelijking
ƒ 7500,— × $(1 + i)^5$ = ƒ 12.000,—, zodat $(1 + i)^5 = 1{,}6$.
Uit de rentetafel blijkt dat p ligt tussen 9,75% en 9,875%, want $1{,}0975^5$ (1,592291749) < 1,6 < $1{,}09875^5$ (1,601380148).

De bepaling van de grenswaarden zonder rentetafel komt in paragraaf 5.6 aan de orde, evenals een gedetailleerder berekening van het rendement op het spaarbiljet.

5.5. De ontwikkeling van de rente-aangroei

In paragraaf 4.1 hebben we twee vragen geformuleerd:

1. Wat is het uitgangspunt voor de renteberekening in een volgende renteperiode indien de looptijd van een kapitaal de lengte van de desbetreffende renteperiode *overschrijdt?*
2. Is er *binnen* een renteperiode altijd sprake van een lineair verband of is er ook een andere groeivorm mogelijk?

In het voorgaande is de eerste vraag al beantwoord. Op basis van deze beantwoording volgt nu het antwoord op de tweede vraag.

5.5.1. Grafische voorstelling

Het uitgangspunt is een kapitaal op tijdstip t_0 groot ƒ 1000,—, dat gedurende drie jaren uitstaat tegen 10% per jaar. Er is bij de aangroei een drietal mogelijkheden.

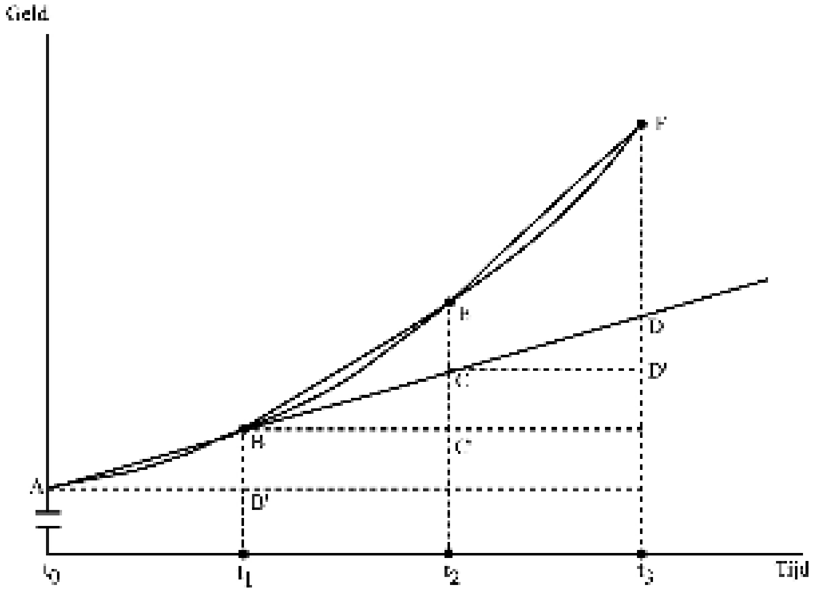
Bedragen in guldens

	K_0	Rente	K_1	Rente	K_2	Rente	K_3
	Situatie		t_0-t_1		t_1-t_2		t_2-t_3
a. Volledig enkelvoudige interest	1000	100	1100	100	1200	100	1300
b. Samengestelde interest doch binnen een renteperiode enkelvoudige interest	1000	100	1100	110	1210	121	1331
c. Volledig samengestelde interest	1000	100	1100	110	1210	121	1331

Situatie a veronderstelt dat K_0 uitgangspunt blijft van de renteberekeningen in volgende renteperioden; geen rente op rente derhalve. Dit impliceert een rechtlijnige relatie niet alleen in de eerste renteperiode, maar ook bij een langere looptijd dan één renteperiode.

De situaties b en c lijken op het eerste gezicht identiek. Wanneer we echter meer waarden bepalen, ook binnen de renteperioden, komen verschillen aan het licht, die in de volgende grafiek blijken.

0838-0392



Figuur 11. Enkelvoudige en samengestelde interest bij één en meer renteperioden.

De ontwikkeling van een kapitaal, uitgezet op basis van enkelvoudige interest (a), is weergegeven door de lijn AD, terwijl BB!SA = CC!SA = DD!SA de hoogte van de jaarlijkse rente is. Duidelijk blijkt nog eens het lineaire (= rekenkundige) verband. De opeenvolgende kapitalen K_0, K_1, K_2 en K_3 vormen een *rekenkundige rij:* het verschil tussen de opeenvolgende termen van de reeks is constant (in casu ƒ 100,—). De aangroei in situatie b, samengestelde interest bij meer renteperioden en binnen elke interestperiode enkelvoudige interest, verloopt langs de lijnstukken AB, BE en EF. Het rekenkundige, rechtlijnige verband beperkt zich tot *binnen* een renteperiode.

5.5.2. Samengestelde interest over delen van de renteperiode

Samengestelde interest gedurende de *gehele* looptijd van de lening, situatie c, leidt tot de kromme AF. Niet alleen tussen de kapitaalwaarden aan het einde van een renteperiode, dus tussen K_0 en K_1, K_1 en K_2 alsmede K_2 en K_3, is een *meetkundig, exponentieel verband* (reden 1 + i); op elk willekeurig moment is de waarde van het (oorspronkelijke) kapitaal te berekenen door vermenigvuldiging met $(1 + i)^y$. Hierin kan y staan voor een geheel getal, bijvoorbeeld $(1 + i)^3$, maar kan y ook een gebroken waarde hebben bijvoorbeeld $(1 + i)^{2,5} = (1 + i)^2 (1 + i)^{0,5} = (1 + i)^2 \sqrt{(1 + i)}$.

Constateer in de grafiek dat bij de vergelijking van de ogenschijnlijk gelijke situaties b en c enkelvoudige interestvergoeding binnen een renteperiode een hoger resultaat oplevert dan samengestelde interestvergoeding binnen een renteperiode.
Wat is de waarde van het kapitaal ter grootte van ƒ 1000,— na een half jaar?
Enkelvoudig interest
ƒ 1000,— + ½ × 10% van ƒ 1000,— = ƒ 1050,—.
Vergelijk dit nog maar eens met de lineaire interestformule.

Samengestelde interest
ƒ 1000,— × $(1 + 0,10)^{0,5}$ =
ƒ 1000,— × 1,048808848 = ƒ 1048,81.
Dat na één jaar in beide gevallen een gelijke eindwaarde wordt bereikt (zie in de grafiek punt B, en na respectievelijk twee en drie renteperioden de punten E en F), komt door invloed van interest op interest
ƒ 1000,— × $(1 + 0,10)^{0,5} \times (1 + 0,10)^{0,5}$ =
ƒ 1000,— × (1 + 0,10) = ƒ 1100,—.

5.5.3. Evenredige en gelijkwaardige percentages
De verschillen tussen enkelvoudige en samengestelde interest hebben geleid tot de twee volgende begrippen.
Evenredige percentages: de percentages zijn *rechtevenredig* met de tijd (derhalve enkelvoudige interest); 1% per maand = 12% per jaar; 8% per jaar = 4% per half jaar.
Gelijkwaardige percentages: de percentages leiden voor gelijke kapitalen, gedurende eenzelfde tijdsverloop tot *gelijke eindwaarden* (derhalve samengestelde interest); 1% per maand is gelijkwaardig met y% per jaar.

$$(1 + 0,01)^{12} = \left(1 + \frac{y}{100}\right)^1 \rightarrow 1 + \frac{y}{100} = 1,12682503 \rightarrow y = 12,68\%.$$

8% per jaar is gelijkwaardig met y% per half jaar

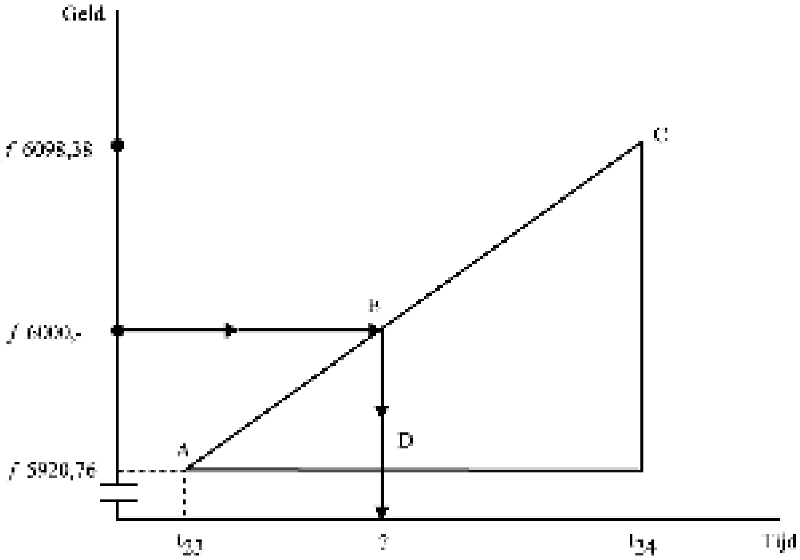
$$(1 + 0,08)^{1/2} = \left(1 + \frac{y}{100}\right)^1 \rightarrow 1 + \frac{y}{100} = 1,039230485 \rightarrow y = 3,92\%.$$

Nog eens met woorden: het maakt in het geval van samengestelde interest niet uit of een kapitaal gedurende één jaar uitstaat tegen 8% per jaar dan wel 3,92% (< 4%!) per half jaar; in beide gevallen wordt, afgezien van afrondingsverschillen, eenzelfde eindwaarde bereikt.

5.6. Lineaire interpolatie als oplossingsmethode bij exponentiële verbanden

Lineaire interpolatie kan een rol vervullen als oplossingsmethode, ook als er tussen grenswaarden (polen) geen lineair verband is.
Nu we de begrippen evenredige en gelijkwaardige percentages in samenhang met enkelvoudige en samengestelde interest hebben behandeld, kunnen we wat dieper ingaan op de aard van de verbanden binnen een renteperiode door deze kennis te koppelen met lineaire interpolatie. Daartoe keren we terug naar de paragrafen 5.3 en 5.4, ten einde enkele vragen nauwkeuriger te beantwoorden.

0838-0393



Figuur 12. Lineaire interpolatie.

5.6.1. Vaststelling van de exacte looptijd

In paragraaf 5.3 speelde onder meer de vraag na hoeveel tijd een kapitaal verdubbeld is als de rentevergoeding 3% SI per jaar bedraagt.
Met behulp van een rentetafel stelden we vast dat deze verdubbeling bereikt wordt „ergens” in het vierentwintigste jaar. Bij de vaststel-

ling van het *exacte tijdstip* is het noodzakelijk om te weten op welke wijze de aangroei binnen een renteperiode verloopt.
Wordt de rente in gelijke mootjes verdeeld binnen de renteperiode (EI) of is de groei exponentieel (SI)?

We berekenen eerst het tijdstip bij evenredige groei over delen van de renteperiode. De grenzen zijn bekend:
– na 23 jaar is de waarde ƒ 3000,— × $1{,}03^{23}$ (1,973586511) = ƒ 5920,76.
– na 24 jaar is het kapitaal aangegroeid tot ƒ 3000,— × $1{,}03^{24}$ (2,032794106) = ƒ 6098,38.

Δ ABC is gelijkvormig met Δ ADE → $\frac{DE}{BC}$ (verhouding op de Y-as) = $\frac{AD}{AB}$
(de corresponderende verhouding op de X-as) —

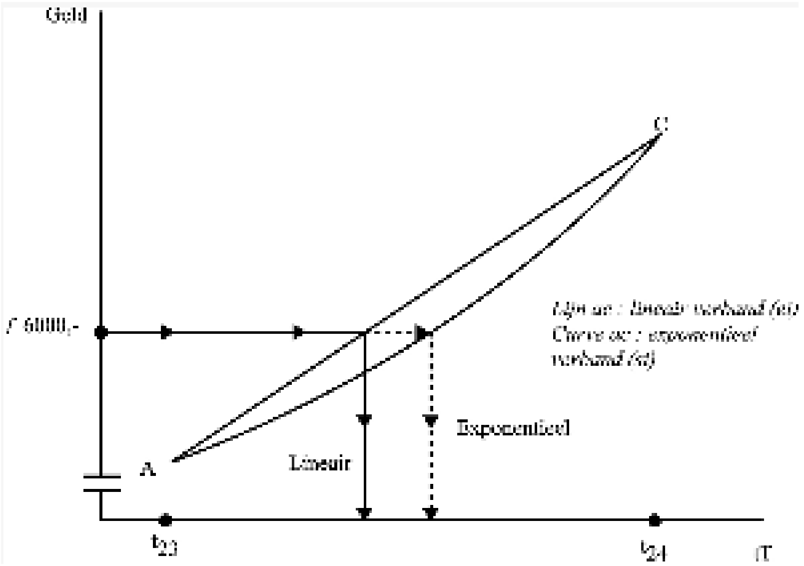
$$\frac{ƒ\,6000,\text{—} - ƒ\,5920{,}76}{ƒ\,6098{,}38 - ƒ\,5920{,}76} = \frac{AD}{1} \rightarrow AD = 0{,}44612.$$

De verdubbeling (van ƒ 3000,—) is nu bereikt na
23 jaar + 0,44612 × 365 dagen =
23 jaar en 162,834 (afgerond 163) dagen.
In paragraaf 5.3 hebben we aangegeven dat een logaritmische oplossing leidt tot 23 jaar en ruim 164 dagen.
Omdat logaritmen zijn gebaseerd op exponentiële verbanden is dit antwoord het exacte tijdstip wanneer de aangroei binnen een renteperiode plaatsvindt volgens samengestelde interest.

Behalve lineair is nu ook exponentieel geïnterpoleerd. Tussen beide polen, de beginwaarde en de eindwaarde van ƒ 3000,— in jaar 24, is naast de lijn AC ook de curve AC getekend. Deze curve geeft, in de tekening enigszins overdreven, de ontwikkeling aan van een geldbedrag bij een samengestelde interestvergoeding binnen een renteperiode.
Opnieuw blijkt dat bij een gegeven rentevergoeding (bijvoorbeeld 3% per jaar) voor een renteperiode enkelvoudige interest binnen de renteperiode een hoger resultaat geeft. Anders gezegd, in geval van enkelvoudige interest binnen de periode is de gewenste aangroei sneller bereikt. De verschillen tussen lineaire en exponentiële interpolatie blijken klein te zijn. In paragraaf 5.6.2. zullen we nog zien dat deze verschillen verwaarloosbaar klein worden wanneer het interpolatie-interval kleiner wordt.
Hierdoor is het mogelijk (gecompliceerde) exponentiële vergelijkin-

gen vrijwel exact op te lossen door middel van lineaire interpolatie. Het verschil tussen *lineaire interpolatie* en *exponentiële interpolatie* blijkt in figuur 13.

0838-0394



Figuur 13. Lineaire en exponentiële interpolatie.

5.6.2. Vaststelling van de exacte rentevoet

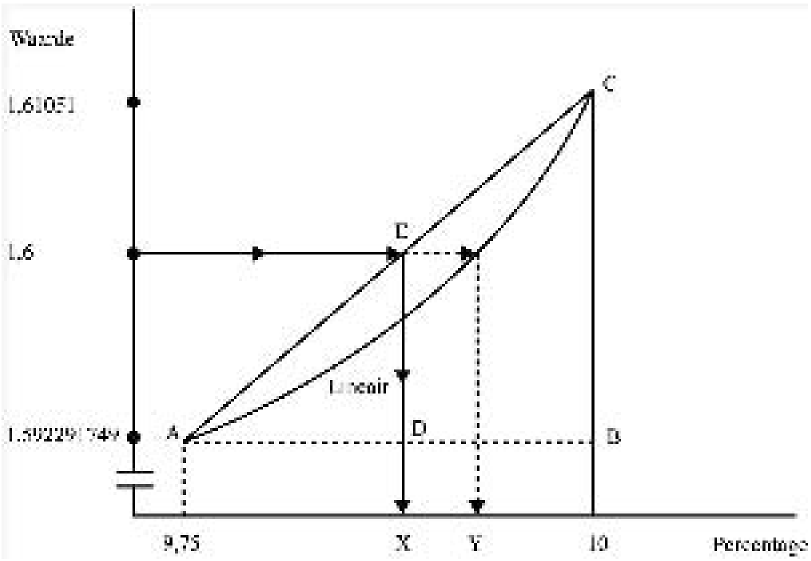
We gaan nu het *rendement* op het spaarbiljet in paragraaf 5.4 in drie decimalen nauwkeurig berekenen met behulp van lineaire interpolatie.

In figuur 14 is met opzet gekozen voor een *interpolatie-interval van 0,25%.*

Opmerking

Dit probleem is ook op te lossen met behulp van logaritmen. De uitkomst is dan p = 9,85603%.

0838-0395



Figuur 14. Rendementsbepaling met lineaire interpolatie.

Oplossing
De totale afstand op de Y-as bedraagt bij een interval van 0,25%:
1,61051 − 1,592291749 = 0,018218251.
De afstand op de Y-as die correspondeert met het verschil tussen het gevraagde percentage en 9,75% bedraagt:
1,6 − 1,592291749 = 0,007708251
Door de verhouding op de Y-as $\frac{0{,}007708251}{0{,}018218251}$ op de X-as over te brengen en te vermenigvuldigen met 0,25%, vindt u 0,1057764958% als het verschil tussen het gevraagde percentage en 9,75%.
Wanneer we letten op de gelijkvormige driehoek ADE en ABC is de opstelling:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC} \rightarrow AD = \frac{1{,}6 – 1{,}592291749}{1{,}61051 – 1{,}592291749} \times 0{,}25\% \text{ enzovoort.}$$

Het rendement op een spaarbiljet bedraagt derhalve
(9,75 + 0,10577. . .)% = 9,8557%; afgerond 9,856%.
Controle met behulp van de berekende waarde:
ƒ 7500,— × $1{,}09856^5$ = ƒ 11.999,97.

Hoewel de afronding van het rendementspercentage naar boven plaatsvindt, blijft de berekende eindwaarde nog onder de feitelijke eindwaarde ad ƒ 12.000,—. Dit komt doordat in dit geval de berekende waarde bij lineaire interpolatie lager ligt dan de exacte waarde bij exponentieel verband, weergegeven door de curve AC.
Het verschil tussen lineaire en exponentiële interpolatie is in figuur 14 sterk overdreven weergegeven door het lijnstuk XY.
Naarmate het interpolatie-interval kleiner wordt, neemt de juistheid van de berekende waarde echter toe.

We berekenen het rendement op het spaarbiljet nog eens, maar nu binnen een interpolatie-interval van 0,125% (in drie decimalen nauwkeurig).
Deze situatie is als het ware een uitvergroting van de lineaire interpolatie in figuur 14. We weten al dat we moeten zoeken tussen 9,75% en 9,875%.
Bij 9,75% hoort de waarde 1,592291749; bij 9,875% de waarde 1,601380148; de berekende waarde is 1,6.

$$p = \frac{1{,}6 - 1{,}592291749}{1{,}601380148 - 1{,}592291749} \times 0{,}125\% + 9{,}75\%$$

$= 0{,}8481417904 \times 0{,}125\% + 9{,}75\%$
Het rendement is (9,75 + 0,10601. . .)%, afgerond 9,856%.

Uit de vergelijking met het eerste antwoord blijkt dat we een iets hoger rendementspercentage hebben gevonden. Dit percentage benadert de exponentiële relatie nog iets beter dan binnen een interval van 0,25%.
De nauwkeurigheid van de lineaire interpolatie neemt toe naarmate men het interpolatie-interval verkleint.
In samenhang hiermee rijst de vraag hoe zonder gebruik te maken van een rentetafel grenswaarden (polen) kunnen worden bepaald. In een dergelijke situatie dient men eerst vrij ruime waarden „willekeurig” te kiezen. In dit voorbeeld, als grenswaarden in eerste aanleg

$p = 8\% \rightarrow 1{,}08^5 = 1{,}469328077$ en
$p = 12\% \rightarrow 1{,}12^5 = 1{,}762341683$.

De benaderde waarde van p wordt dan

$$8\% + \frac{1{,}6 - 1{,}469328077}{1{,}762341683 - 1{,}469328077} \times 4\% =$$

$8\% + 1{,}7838\ldots\% = 9{,}7838\%$.

Aangezien lineaire interpolatie in dit geval een te lage waarde geeft (zie fig. 14) kunnen de grenzen 9,7% en 9,9% een nieuw interval vormen, waarna een tweede interpolatie een veel nauwkeuriger resultaat zal geven.

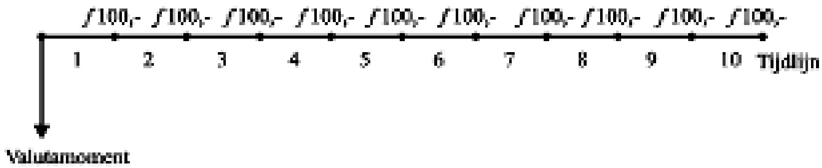
6. Renteberekeningen met meer geldbedragen; de eliminatiemethode als uniforme oplossingsmethode

Evenals voor één geldbedrag is het mogelijk voor een reeks van geldbedragen zowel eindwaarde- als contante-waardeberekeningen uit te voeren.
In deze paragraaf zullen we daartoe een eerste aanzet geven. Hierbij staat een door ons ontwikkelde methode – de zogenoemde eliminatiemethode – centraal.
De behandeling geschiedt aan de hand van een getallenvoorbeeld waarmee we een aantal situaties fingeren.
Uitgangspunt is steeds een reeks geldbedragen ter grootte van elk *ƒ* 100,— en een vigerende rente van 8,2% per jaar (SI).
Door met die reeks geldbedragen te schuiven op de tijdlijn ontstaat een aantal verschillende situaties.

6.1. Berekening van de contante waarde

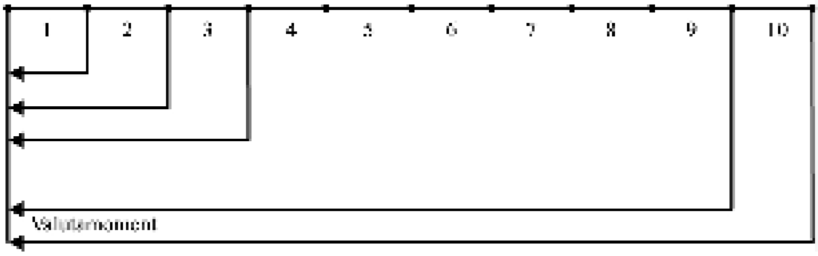
In de eerste situatie vervallen tien bedragen van elk *ƒ* 100,— na respectievelijk 1,2 tot en met 10 renteperioden.

0838-0396



De eerste vraag die zich voordoet, betreft de waardering van deze reeks bedragen aan het begin van de tijdlijn: de *contante waarde.* De vraagstelling komt neer op het afrenten van niet één, maar verscheidene bedragen. In dit opzicht verschilt het probleem niet van het reeds behandelde probleem van het verdisconteren van één geldbedrag. Van belang is wel de vraag of, gezien de samenhang tussen de gegeven geldbedragen, een *systematische oplossing* mogelijk is. Dus een oplossing die rekening houdt met het verband tussen de opeenvolgende bedragen. Een niet-systematische oplossing komt neer op de optelling van tien bedragen die stuk voor stuk afzonderlijk zijn afgerent.

0838-0397



Figuur 15. De contante waarde van een aantal geldbedragen.

Systematische oplossing
Eerst wordt de contante waarde aan het begin van de tijdlijn, dit is tijdstip 1-1-1 (respectievelijk dag-maand-jaar), bepaald. Afrenten betekent vermenigvuldiging met de afrentingsfactor

$$\frac{1}{(1 + i)^n}$$

in casu $\frac{1}{1{,}082^n}$ waarbij n het aantal renteperioden aangeeft.

Het moment waarop de waarde van de geldbedragen wordt bepaald, zullen we steeds aanduiden als *peildatum* dan wel *valutamoment.*
Het valuteren van de reeks bedragen ad *f* 100,— op 1-1-1 geeft de volgende vergelijking.

0838-0397a

$$C_{1\text{-}1\text{-}1} = \frac{f\,100,-}{1{,}082} + \frac{f\,100,-}{1{,}082^2} + \frac{f\,100,-}{1{,}082^3} + \dots + \frac{f\,100,-}{1{,}082^9} + \frac{f\,100,-}{1{,}082^{10}} \quad (1)$$

$$1{,}082 \times C_{1\text{-}1\text{-}1} = f\,100,- + \frac{f\,100,-}{1{,}082} + \frac{f\,100,-}{1{,}082^2} + \dots + \frac{f\,100,-}{1{,}082^8} + \frac{f\,100,-}{1{,}082^9} \quad (2)$$

$$0{,}082 \times C_{1\text{-}1\text{-}1} = f\,100,- - \frac{f\,100,-}{1{,}082^{10}} \quad (3)$$

$$0{,}082 \times C_{1\text{-}1\text{-}1} = f\,100,- \left(1 - \frac{1}{1{,}082^{10}}\right)$$

$$C_{1\text{-}1\text{-}1} = f\,100,- \left(\frac{1 - 1/1{,}082^{10}}{0{,}082}\right) (4) \quad C_{1\text{-}1\text{-}1} = f\ [illegible]$$

Toelichting op bovenstaande oplossing
Formulering (1), de algebraïsche weergave van het gestelde probleem, is een meetkundige rij: de verhouding tussen de opeenvolgende termen van de rij is een constante, te weten 1,082 (of eventueel 1/1,082). Een term uit de rij kon worden gevonden door, van links naar rechts lezend, te vermenigvuldigen met de factor $\frac{1}{1{,}082}$.

Voorbeeld

$$\frac{f\ 100{,}\text{—}}{1{,}08^2} = \frac{f\ 100{,}\text{—}}{1{,}082} \times \frac{1}{1{,}082}$$

$$\frac{f\ 100{,}\text{—}}{1{,}08^2} = \frac{f\ 100{,}\text{—}}{1{,}082^9} \times \frac{1}{1{,}082}$$

U kunt de rij (1) natuurlijk ook van rechts naar links lezen; de vermenigvuldigfactor is dan 1,082.

Voorbeeld

$$\frac{f\ 100{,}\text{—}}{1{,}08^2} = \frac{f\ 100{,}\text{—}}{1{,}08^2} \times 1{,}082$$

$$\frac{f\ 100{,}\text{—}}{1{,}082} = \frac{f\ 100{,}\text{—}}{1{,}08^2} \times 1{,}082$$

De eigenschap van vergelijking (1) is een rechtstreeks gevolg van de renteconditie samengestelde interest. In paragraaf 4 hebben we de interestfactor (1 + i) al leren kennen.
De exponentiële relatie tussen de opeenvolgende termen gebruiken we om de oplossing van vergelijking (1) te systematiseren.
Door de vermenigvuldiging met de verhoudingsfactor van de rij, de reden $(1 + i)^1$, ontstaat een tweede vergelijking die 8,2% groter is dan de eerste vergelijking. De grotere waarde van vergelijking (2) betekent dat het salderen van de vergelijkingen (1) en (2) het eenvoudigste verloopt door (2) te verminderen met (1). Na deze aftrekking resulteert vergelijking (3), waarbij we met de ruimte tussen de twee overgebleven termen duidelijk proberen te maken dat de termen 1 tot en met 9 van vergelijking (1) wegvallen tegen de corresponderende termen 2 tot en met 10 van vergelijking (2).
Vergelijking (4) luidt in symboolvorm

$$C = f\ 100{,}\text{-}\ \mathrm{x} \left(\frac{1 - A_{108{,}2}}{0{,}082}\right)$$

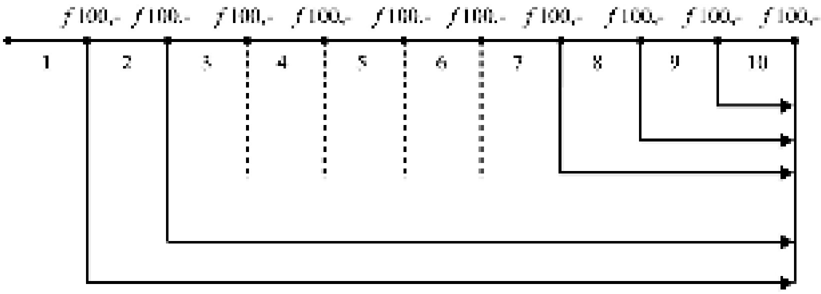
De berekening kan echter niet met behulp van een rentetafel geschieden omdat 8,2% geen „tafelprocent” is. Vandaar dat we gebruik hebben gemaakt van een rekenmachine

$$C = ƒ\ 100,\!— \times \left(\frac{1 - 0{,}4547025527}{0{,}082}\right) = ƒ\ 665,\!—$$

6.2. Berekening van de eindwaarde

We gaan uit van dezelfde tijdlijn als in paragraaf 6.1.; alleen bepalen we nu de waarde van de bedragen op het tijdstip 31-12-10.

0838-0398



Figuur 16. De eindwaarde van verscheidene kapitalen.

Eerst renten we de bedragen individueel op door te vermenigvuldigen met de oprentingsfactor $(1 + i)^n$, in casu $1{,}082^n$

$E_{31\text{-}12\text{-}10}$ =

$$ƒ\ 100,\!— \times 1{,}082^9 + ƒ\ 100,\!— \times 1{,}082^8 + \ldots + ƒ\ 100,\!— \times 1{,}082 + ƒ\ 100,\!— \qquad (1)$$

Ook nu is vanwege de interestvergoeding op basis van samengestelde interest weer sprake van een meetkundige rij, die kan worden opgelost door vermenigvuldiging met de reden van de rij: $1{,}082^1$. Deze wijze van oplossen van meetkundige, exponentiële rijen biedt een *uniforme oplossingsmethode,* ook voor complexere rijen. Omdat aan elkaar gelijke termen hierbij tegen elkaar wegvallen, hebben we deze methode de *eliminatiemethode* genoemd.

We berekenen nu met behulp van de eliminatiemethode de (eind)-waarde van vergelijking (1).

Wiskundig geschoolden kunnen constateren dat de resultante van de eliminatiemethode gelijk is aan het resultaat dat de sommeringsformule voor een meetkundige rij oplevert. Voor wie de afleiding van deze formule kent, behoeft dit geen verbazing te wekken. Voor wie (de afleiding van) deze sommeringsformule een raadsel is, biedt de eliminatiemethode soelaas.

0838-0399

$$E_{10} = f\,100,- \times 1{,}082^{9} + 100,- \times 1{,}082^{8} + \ldots + f\,100,- \times 1{,}082 + f\,100,- \quad (1)$$

$$1{,}082 \times E_{10} = f\,100,- \times 1{,}082^{10} + 100,- \times 1{,}082^{9} + \ldots + f\,100,- \times 1{,}082^{2} + f\,100,- \times 1{,}082 \quad (2)$$

$$0{,}082 \times E_{10} = f\,100,- \times 1{,}082^{10} - f\,100,-$$

$$0{,}082 \times E_{10} = f\,100,- \times (1{,}082^{10} - 1)$$

$$E_{10} = f\,100,- \times \frac{(1{,}082^{10} - 1)}{0{,}082} \text{ of in symbolisch } E_{n} = f\,100,- \times \frac{(S_{n|8,2} - 1)}{0{,}082} =$$

$$f\,100,- \times \frac{2{,}19923908 - 1}{0{,}082} = f\,1462{,}49$$

6.3. Herbeleggingsveronderstelling

In paragraaf 6.1 hebben we de *huidige* waarde bepaald van tien toekomstige bedragen van ƒ 100,—. Voor iemand met een tijdvoorkeur voor geld ter grootte van 8,2% per jaar hebben deze bedragen, die met ingang van heden aan het einde van elk jaar vervallen, een waarde van ƒ 665,—. Met andere woorden, uitgaande van een rentevergoeding van 8,2% per jaar bestaat er voor deze persoon equivalentie tussen ƒ 665,— aan huidig geld en tien toekomstige bedragen van elk ƒ 100,—, die vervallen op de aangegeven tijdstippen. Hij zal dus op basis van een tijdvoorkeur voor geld van 8,2%, bereid zijn nu een bedrag van ƒ 665,— te verruilen voor een jaarlijkse ontvangst van ƒ 100,— gedurende tien jaar. Deze situatie is van toepassing op een belegger die zich afvraagt hoeveel hij wil steken in een bepaald project dat hem in de komende tien jaren ƒ 100,— per jaar oplevert, gegeven een rendements-eis van 8,2% per jaar. Dit blijkt maximaal ƒ 665,— te zijn. Iemand zal een eventuele belegging namelijk acceptabel vinden zolang de contante waarde van de ontvangsten op de belegging groter is dan de huidige uitgave. Deze methode om een belegging of investering te beoordelen noemen we de methode van de netto contante waarde. Netto heeft betrekking op het feit dat hierbij de contante waarde van de ontvangsten en van de uitgave(n) worden gesaldeerd.

In paragraaf 6.2 hebben we van dezelfde reeks bedragen de eindwaarde, direct na het vervallen van de tiende termijn en uitgaande van 8,2% per jaar, bepaald op ƒ 1462,49. Deze situatie is van toepassing op een belegger die gedurende tien jaar aan het einde van elk jaar ƒ 100,— bij voorbeeld belegt op een spaarrekening met een (vaste) rentevergoeding van 8,2% per jaar. Hij verruilt zo in de loop van de tijd tien maal een bedrag van ƒ 100,— voor ƒ 1462,49 na 10 jaar.

In het eerste geval is er, uitgaande van een rendementseis van 8,2% per jaar, sprake van een belegging van ƒ 665,— die resulteert in een jaarlijkse stroom aan ontvangsten van ƒ 100,— gedurende tien jaar. In de tweede situatie zien we een jaarlijkse belegging van steeds ƒ 100,— door een rentevergoeding van 8,2% per jaar gedurende tien jaar aangroeien tot ƒ 1462,49. Leggen we de situatie van beide beleggers op elkaar dan resteert een belegging van ƒ 665,—, waarbij de jaarlijks vrijvallende bedragen van ƒ 100,— opnieuw worden belegd tegen een rentevergoeding van 8,2% per jaar. Aan het einde van de beschouwde periode is de oorspronkelijke belegging van ƒ 665,— zo aangegroeid tot een bedrag van ƒ 1462,49.
Gecombineerd komt het erop neer dat een bedrag van ƒ 665,— gedurende tien jaar tegen 8,2% per jaar wordt belegd:
$f\ 665,\text{—} \times 1{,}082^{10} = f\ 1462{,}49$.

De waarde van ƒ 1462,49 na tien jaar wordt zowel bereikt door een huidige, eenmalige belegging van ƒ 665,— als door een jaarlijkse belegging van ƒ 100,—, te storten telkens aan het einde van een jaar. Om met een belegging van ƒ 665,—, waaruit een jaarlijkse stroom aan ontvangsten voortvloeit van ƒ 100,— gedurende tien jaar, een (eind)waarde te bereiken van ƒ 1462,49, moeten de tussentijds vrijvallende bedragen worden herbelegd tegen de oorspronkelijke rendementseis van 8,2% per jaar. Kunnen deze bedragen namelijk slechts worden herbelegd tegen bijvoorbeeld 7%, dan zal de waarde na tien jaar ook lager zijn:

$$E_{10} = f\ 100,\text{—} \times \{1{,}07^{90} + 1{,}07^{8} + 1{,}07^{7} + \ldots\ldots + 1{,}07 + 1\} \qquad (1)$$

$$1{,}07 \times E_{10} = f\ 100,\text{—} \times \{1{,}07^{10} + 1{,}07^{9} + 1{,}07^{8} + \ldots\ldots + 1{,}07^{2} + 1{,}07\} \qquad (2)$$

$$0{,}07 \times E_{10} = f\ 100,\text{—} \times \{1{,}07^{10} - 1\}$$

$$E_{10} = f\ 100,\text{—} \times \frac{1{,}07^{10} - 1}{0{,}07} = f\ 1381{,}64$$

Het omgekeerde kan zich natuurlijk ook voordoen: een hoger herbeleggingsrendement dan de rendementseis van 8,2% leidt tot een betere positie voor de belegger op de gekozen einddatum.

Alleen wanneer de tussentijds vrijvallende bedragen kunnen worden belegd tegen 8,2% per jaar wordt eenzelfde waarde bereikt als bij een belegging van *f* 665,— gedurende een periode van tien jaar tegen 8,2%.

Conclusie
De beoordeling van een belegging aan de hand van de contante waarde van de toekomstige kasstromen, betekent derhalve de impliciete veronderstelling dat de tussentijds vrijvallende bedragen zullen worden herbelegd tegen de rendementseis die aan de contante waarde ten grondslag ligt. We spreken daarom bij de toepassing van de netto-contante-waarde-methode wel van de herbeleggingsveronderstelling.

6.4. Het begrip renten
In de voorgaande paragrafen is de contante waarde en de eindwaarde berekend van een reeks geldbedragen. In de financiële praktijk spreekt men dan van *renten.*
Het begrip rente wordt, behalve in de betekenis van interest en disconto, namelijk ook nog op een derde manier gebruikt en kan dan als volgt worden gedefinieerd.
Een *rente* is een reeks termijnen, die met gelijke tijdsintervallen (perioden) vervallen. Onder een *termijn* verstaat men in dit verband een som gelds.
We kunnen voor het gebruik van deze begrippen denken aan de volgende zinsnede: „De termijnen van een lijfrente vervallen aan het einde van iedere maand”. Een levensverzekeringsmaatschappij betaalt dan aan het einde van iedere maand een bepaald bedrag.

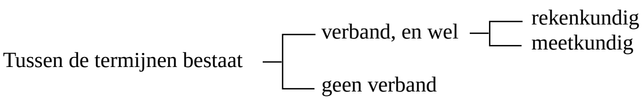
6.4.1. Typologie van renten
Een rente in de betekenis van een reeks termijnen kan naar vier gezichtspunten worden beoordeeld.

1. Het vervalmoment van de termijn
   - *postnumerando*
     de termijnen vervallen aan het *einde* van elke periode
   - *praenumerando*
     de termijnen vervallen aan het *begin* van elke periode
2. De tijdsduur van de rente
   - *tijdelijk*
     de rente heeft een *beperkt, eindig* aantal termijnen
   - *eeuwigdurend*
     de rente heeft een *onbeperkt, oneindig* aantal termijnen

3. Het begin van de rente
   – *dadelijk ingaand*
     de rente loopt *vanaf de eerstvolgende* (afgesproken) *periode* (bijvoorbeeld een maand)
   – *uitgesteld*
     de rente begint pas *na een aantal perioden* te lopen
4. De grootte van de termijnen
   – *gelijk blijvend*
     alle termijnen van de rente zijn aan elkaar *gelijk*
   – *ongelijk*
     de termijnen van de rente *verschillen* van elkaar

De ongelijke termijnen van een rente kunnen nog als volgt worden onderverdeeld.

0838-0399a



Bij een rekenkundig verband verspringen de termijnen steeds met een vast bedrag. Anders gezegd: bij een rekenkundig verband *is het verschil* tussen de opeenvolgende termijnen *constant*. Bij een meetkundig verband is een volgende termijn te berekenen door de voorafgaande termijn te vermenigvuldigen met een vast getal. Anders gezegd, bij een meetkundig verband *is de verhouding* tussen de opeenvolgende termijnen *constant*.

Voorbeeld
Van welk verband is in de volgende situaties sprake?
1. ƒ 1000,—, ƒ 1010,—, ƒ 1020,— en ƒ 1030,—.
2. ƒ 1000,—, ƒ 1010,—, ƒ 1020,10 en ƒ 1030,30.

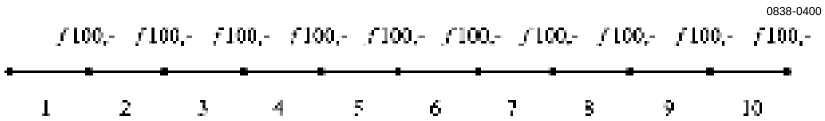
We berekenen tevens voor beide situaties de tiende termijn van de rente.
In situatie 1 is sprake van een rekenkundig verband: het verschil tussen de opeenvolgende termijnen is steeds ƒ 10,—.
De tweede termijn is ƒ 10,— groter dan de eerste termijn. De derde termijn is ƒ 10,— groter dan de tweede en tweemaal ƒ 10,— groter dan de eerste termijn.
De tiende termijn zal dan negenmaal ƒ 10,— groter zijn dan de eerste termijn, dus ƒ 1090,—.
In situatie 2 is sprake van een meetkundig verband: de verhouding tussen de opeenvolgende termijnen is steeds 1,01. Dit is het getal waarmee telkens wordt vermenigvuldigd.

$$\frac{ƒ\ 1010,\text{—}}{ƒ\ 1000,\text{—}} = 1{,}01\ ;\ \frac{1020{,}10}{ƒ\ 1010,\text{—}} = 1{,}01 \text{ enzovoort.}$$

$ƒ\ 1010,\text{—} = 1{,}01 \times ƒ\ 1000,\text{—}$
$ƒ\ 1020{,}10 = 1{,}01 \times ƒ\ 1010,\text{—}\ 1020{,}10 = 1{,}01 \times 1{,}01 \times ƒ\ 1000,\text{—} = 1{,}01^2 \times ƒ\ 1000,\text{—}$

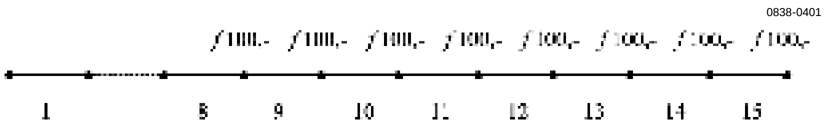
De tiende termijn is $1{,}01^9 \times ƒ\ 1000,\text{—} = ƒ\ 1093{,}69$.
(Op deze indeling berust de traditionele benadering van berekeningen in geval van renten, waarbij voor elk van de mogelijke renten formules (kunnen) worden ontwikkeld. In deze formules worden in principe vervolgens waarden uit rentetafels gesubstitueerd. Wij zullen ons echter baseren op de eliminatiemethode.)
Doordat de onderverdeling naar vier criteria een rente definieert op vier punten, kunnen zich heel wat verschillende renten, en daarmee formules, voordoen.

Voorbeeld



De op de tijdas weergegeven rente kan worden omschreven als een dadelijk ingaande, tijdelijke, postnumerando rente met gelijke termijnen.

Voorbeeld



In dit voorbeeld is sprake van een 7 jaar uitgestelde, tijdelijke postnumerando rente met gelijke termijnen: na 7 jaar uitstel vervalt de eerste termijn aan het einde van de periode. Verleggen we het beoordelingsmoment echter een jaar ofwel definiëren we de rente ultimo jaar 8, dan is er een 8 jaar uitgestelde, tijdelijke praenumerando rente met gelijke termijnen.
Op soortgelijke wijze is de rente in het vorige voorbeeld een 1 jaar uitgestelde, tijdelijke praenumerando rente.

Uit deze voorbeelden blijkt al dat op bepaalde punten een zekere relativering mogelijk is met betrekking tot de gegeven indeling van renten.
In de voorgaande paragrafen zijn trouwens van een rente *systematisch* de contante waarde en de eindwaarde berekend, zonder dat we het begrip rente ook maar hadden gedefinieerd. De indeling van renten naar hun criteria is praktisch gezien bij de berekeningen niet van belang en kan bij strikte toepassing zelfs tot verkeerd gerichte oplossingsmethodieken aanleiding geven.

Waarschuwing
Het gevaar is groot dat iemand formules uit het hoofd leert om ze daarna los te laten op een rente, die op basis van een aantal gegevens is gedefinieerd. Nog afgezien van de vraag of de rente juist is gedefinieerd, kunnen hierbij allerlei fouten worden gemaakt: iemand trekt een verkeerd „laatje” open met een formule die op het probleem niet van toepassing is, of hij trekt wel het goede „laatje” open, maar doet dat, bij wijze van spreken, zo onhandig dat de formule verkeerd of zelfs helemaal niet te voorschijn rolt.

7. Renteberekeningen voor tijdelijke renten met gelijke termijnen

In paragraaf 6 hebben we een begin gemaakt met de behandeling van renteberekeningen met meer geldbedragen. Bij deze berekeningen zijn twee hoofdproblemen te onderscheiden.
1. contante-waardeberekeningen;
2. eindwaardeberekeningen.

Onder de contante-waardeberekeningen vallen ook *(interne) rendementsberekeningen:* het berekenen van dié rentevoet, waarbij de toekomstige waarde en de contante waarde van geldbedragen aan elkaar gelijk zijn.
In het verlengde van deze (interne) rendementsberekeningen ligt de methode van het interne rendement. Deze methode wordt, evenals de netto-contante-waarde methode, gebruikt in het kader van investerings- en beleggingsbeslissingen. De basisgedachte van deze methode is dat projecten met het hoogste interne rendement de voorkeur zullen krijgen.

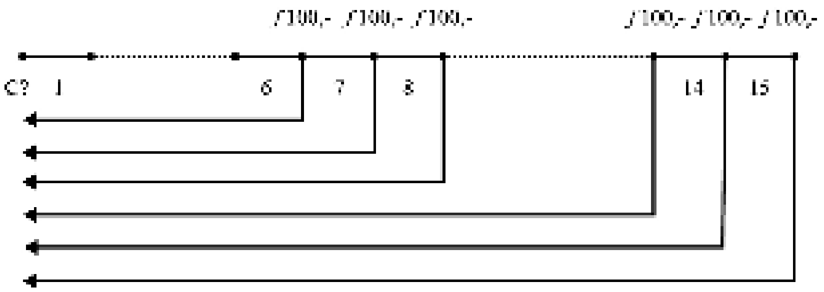
7.1. Contante-waardeberekeningen

In paragraaf 6 is de contante waarde berekend van een dadelijk ingaande postnumerando rente met tien jaartermijnen ad ƒ 100,—. De contante waarde, berekend op basis van 8,2% SI per jaar, bedroeg ƒ 665,—. Door te schuiven op de tijdlijn kunnen we dit voorbeeld uitbreiden. Dit schuiven op de tijdlijn komt in feite neer op het verleggen van het beoordelingsmoment.

Het uitgangspunt is (opnieuw) een rente met een tiental gelijke termijnen van ƒ 100,—, terwijl de renteconditie 8,2% per jaar bedraagt, op basis van samengestelde interest.

De eerste van de tien termijnen vervalt aan het einde van het zesde jaar. De vraag rijst wat de waarde van deze vijf jaar uitgestelde postnumerando rente is aan het begin van het eerste jaar.

0838-0402



De berekening van de gevraagde waarde kan zonder de rente eerst te „formuleren”, dus zonder de rente te definiëren en de corresponderende formule te vinden. De waarde van de rente aan het begin van het eerste jaar kan worden gevonden door de termijnen van de rente *stuk voor stuk rechtstreeks* te valuteren.

Toepassing van de eliminatiemethode vereist het vermenigvuldigen met de factor 1,082.

0838-0403

$$C_{1-1-1} = \frac{f\ 100,-}{1,082^{6}} + \frac{f\ 100,-}{1,082^{7}} + \frac{f\ 100,-}{1,082^{8}} + \cdots\cdots + \frac{f\ 100,-}{1,082^{14}} + \frac{f\ 100,-}{1,082^{15}}$$

$$1,082 \times C_{1-1-1} = \frac{f\ 100,-}{1,082^{5}} + \frac{f\ 100,-}{1,082^{6}} + \frac{f\ 100,-}{1,082^{7}} + \cdots\cdots + \frac{f\ 100,-}{1,082^{13}} + \frac{f\ 100,-}{1,082^{14}}$$

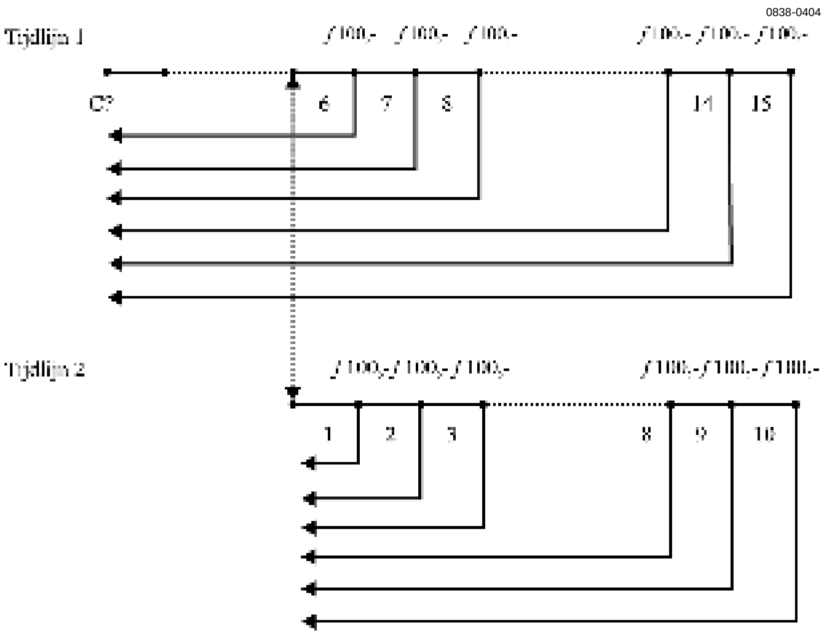
$$0,082 \times C = \frac{f\ 100,-}{1,082^{5}} - \frac{f\ 100,-}{1,082^{15}}$$

$$0,082 \times C = f\ 100,- \ (1/1,082^{5} - 1/1,082^{15})$$

$$C_{1-1-1} = f\ 100,- \left(\frac{1/1,082^{5} - 1/1,082^{15}}{0,082}\right) = f\ 100,- \times \frac{(1,082^{-5} - 1,082^{-15})}{0,082}$$

$$C_{1-1-1} = f\ 100,- \left(\frac{0,674316 - 0,306613}{0,082}\right) = f\ 448,42$$

De berekening van de contante waarde van een uitgestelde rente verschilt in wezen niet van een zelfde berekening voor een dadelijk ingaande rente met een gelijk aantal en even grote termijnen.
De illustratie toont het verschil nog eens met behulp van twee tijdlijnen.



Opmerking
De getallen op de beide tijdlijnen geven in dit geval het aantal perioden aan, dat ligt tussen het beoordelingsmoment en het tijdstip waarop een termijn vervalt.
Er is in feite slechts één verschil tussen beide renten: van de uitgestelde rente vervallen de termijnen 5 jaar later dan van de dadelijk ingaande (postnumerando) rente. Wanneer we nu van de uitgestelde rente het beoordelingsmoment verleggen van het valutamoment (begin jaar 1) naar het begin van jaar 6, dan vervallen de termijnen na respectievelijk 1, 2 tot en met 10 jaar. De uitgestelde rente wordt zo geheel identiek aan de dadelijk ingaande rente. Door te schuiven op de tijdlijn en het beoordelingsmoment te verleggen, valt de berekening van de uitgestelde rente in twee stappen uiteen.

De eerste stap betreft de berekening van de contante waarde van de dadelijk ingaande postnumerando rente. Dit is dan de waarde van de uitgestelde rente aan het begin van het zesde jaar.
De formulering van dit probleem leidt tot de volgende vergelijking:

$$C_{1\text{-}1\text{-}6} = \frac{f\ 100,\!—}{1{,}082} + \frac{f\ 100,\!—}{1{,}082^2} + \frac{f\ 100,\!—}{1{,}082^3} + \ldots + \frac{f\ 100,\!—}{1{,}082^{10}} \qquad (1)$$

Via de tweede stap moet deze waarde alsnog vijf jaar worden gedisconteerd. De afrentingsfactor voor de vermenigvuldiging van vergelijking (1) bedraagt derhalve $\frac{1}{1{,}082}$.

De uitwerking van beide stappen kan op twee manieren plaatsvinden.

Methode 1

$$C_{1\text{-}1\text{-}1} = f\ 100{,}\text{—} \times \left(\frac{1}{1{,}082} + \frac{1}{1{,}082^2} + \frac{1}{1{,}082^3} + \ldots + \frac{1}{1{,}082^{10}}\right) \times \frac{1}{1{,}0825}$$

Stel de waarde van de vorm tussen haakjes P, dan kan P worden berekend door toepassing van de eliminatiemethode.

0838-0405

$$P = \frac{1}{1{,}082} + \frac{1}{1{,}082^2} + \frac{1}{1{,}082^3} + \ldots + \frac{1}{1{,}082^{10}}$$

$$1{,}082 \times P = 1 + \frac{1}{1{,}082} + \frac{1}{1{,}082^2} + \ldots + \frac{1}{1{,}082^9}$$

$$0{,}082 \times P = 1 - \frac{1}{1{,}082^{10}}$$

$$P = \frac{1 - \frac{1}{1{,}082^{10}}}{0{,}082} \quad \left(\text{in symboolvorm : } P = \frac{1 - \text{[illegible]}}{0{,}082}\right).$$

De waarde van de (uitgestelde) rente aan het begin van jaar 1 wordt dan
f 100,— × 6,64996887 × 0,6743163595 = f 665,— × 0,6743163595 = f 448,42.

Methode 2

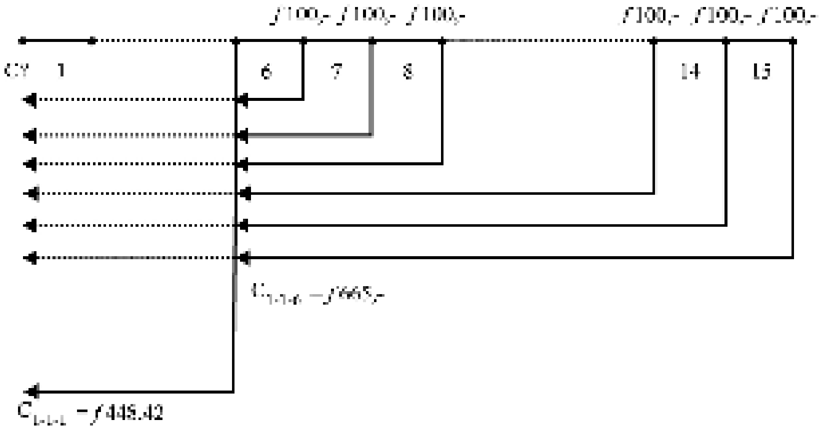
$$C_{1\text{-}1\text{-}1} = f\ 100{,}\text{—} \times \left(\frac{1}{1{,}082} + \frac{1}{1{,}082^2} + \frac{1}{1{,}082^3} + \ldots + \frac{1}{1{,}082^{10}}\right) \times \frac{1}{1{,}082^5}$$

Omdat alle termen hetzelfde grondtal (1,082) hebben, is het mogelijk de termen tussen haakjes te vermenigvuldigen met $\frac{1}{1,082}$.

$$C = f\ 100,\!— \times \left(\frac{1}{1,082^6} + \frac{1}{1,082^7} + \frac{1}{1,082^8} + \ldots + \frac{1}{1,082^{15}} \right)$$

Deze vergelijking kunnen we ook vinden door de termijnen van de rente *rechtstreeks* te valuteren op de gewenste peildatum. De waarde van de rente aan het begin van jaar 1 is vanzelfsprekend opnieuw ƒ 448,42.
De verhouding tussen de twee wijzen van berekenen kan aan de hand van de volgende tijdlijn worden geïllustreerd.

0838-0406



Methode 1 berekent beide stappen afzonderlijk: eerst wordt de waarde van de rente op een ander – *willekeurig* gekozen – beoordelingsmoment bepaald en vervolgens wordt het berekende bedrag gedisconteerd op het gewenste valutamoment.
Bij *methode 2* blijft de afzonderlijke berekening van de tussenstap door de wiskundige vereenvoudiging achterwege. Deze vereenvoudiging komt er, praktisch gezien, op neer dat (alsnog) sprake is van één beoordelingsmoment, namelijk het begin van jaar 1. De stippellijnen bij de tijdlijn geven dit aan.

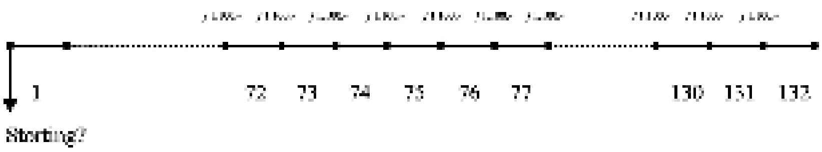
Een paar conclusies naar aanleiding van het voorgaande

1. De waarde van een 5 jaar uitgestelde postnumerando rente met 10 jaartermijnen van elk ƒ 100,— is op basis van 8,2% SI per jaar equivalent met ƒ 448,42 aan het begin van het eerste jaar.

2. De waarde van een 5 jaar uitgestelde postnumerando rente met 10 jaartermijnen van elk *ƒ* 100,— is op basis van 8,2% SI per jaar equivalent met *ƒ* 665,— aan het begin van het zesde jaar.
3. Een bedrag van *ƒ* 665,— over 5 jaar is op basis van 8,2% SI per jaar equivalent met *ƒ* 448,42 nu, want *ƒ* 665,— $\times$ $A_{58,2}$ = *ƒ* 448,42. We kunnen deze laatste berekening ook omdraaien: *ƒ* 448,42 $\times$ $S_{58,2}$ = *ƒ* 665,—.
4. Door de geldbedragen direct te valuteren op de gewenste peildatum voorkomen we onnodige tussenstappen en daarmee tevens een aantal mogelijke fouten. Het tekenen van een tijdlijn is een handig middel om deze problemen juist te formuleren.

Voorbeeld
Iemand wil over 6 jaar gedurende 5 jaren aan het begin van elke maand beschikken over *ƒ* 1100,—. Welk bedrag moet hij daartoe nu op een spaarrekening zetten indien de rente op de spaarrekening 0,4% SI per maand bedraagt?

0838-0407



Opmerking
De periode-aanduiding op de tijdlijn is in maanden.

De vraag naar het te storten bedrag komt neer op de berekening van de contante waarde, op het moment van storting, van de gewenste stroom opnamen. De bedragen moeten worden afgerent tegen 0,4% per maand.

0838-0408

$$C = f\ 1.100,- \left(\frac{1}{1{,}004^{72}} + \frac{1}{1{,}004^{73}} + \frac{1}{1{,}004^{74}} + \cdots\cdots + \frac{1}{1{,}004^{121}} \right)$$

$$1{,}004 \times C = f\ 1.100,- \left(\frac{1}{1{,}004^{71}} + \frac{1}{1{,}004^{72}} + \frac{1}{1{,}004^{73}} + \cdots\cdots + \frac{1}{1{,}004^{120}} + \right)$$

$$0{,}004 \times C = f\ 1.100,- \left(\frac{1}{1{,}004^{71}} + \qquad - \frac{1}{1{,}004^{121}} \right)$$

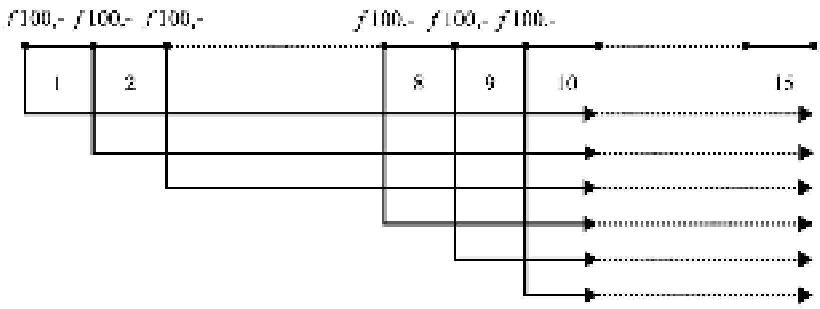
$$C = f\ 1.100,- \frac{(A_{\overline{121}|0,4} - A_{\overline{71}|0,4})}{0{,}004} \longrightarrow C = f\ 1.100,- \times 40{,}10668516$$

De noodzakelijke storting bedraagt daarmee ƒ 44.117,35.

7.2. Eindwaardeberekeningen

Voor de behandeling van het onderdeel eindwaardeberekeningen kiezen we weer een rente van tien jaartermijnen ad ƒ 100,—, waarvan de vervaldata op onderstaande tijdlijn zijn aangegeven. De rente bedraagt 8,2% per jaar (SI).

0838-0409



We kiezen analoog aan de berekeningen in de vorige paragraaf een tweetal beoordelingsmomenten. Allereerst berekenen we de waarde van de termijnen van de rente aan het einde van jaar 10 en vervolgens ultimo jaar 15.

0838-0410

$$E_{(\text{jaar } 10)} = f\,100,\!- \; (1{,}082^{10} + 1{,}082^{9} + 1{,}082^{8} + \ldots + 1{,}082^{1})$$

$$1{,}082 \times E = f\,100,\!- \; (1{,}082^{11} + 1{,}082^{10} + 1{,}082^{9} + \ldots + 1{,}082^{2})$$

$$0{,}082 \times E = f\,100,\!- \; (1{,}082^{11} - 1{,}082^{1})$$

$$E_{10} = f\,100,\!- \; \frac{1{,}082^{11} - 1{,}082}{0{,}082} = f\,100,\!- \; \frac{s_{\overline{11}|8,2} - s_{\overline{1}|8,2}}{0{,}082}$$

De waarde van de rente 1 jaar nadat de laatste termijn vervallen is, bedraagt dan:
ƒ 100,— × 15,82411683 = ƒ 1582,41.
De waarde van deze rente aan het einde van jaar 15 kan nu weer op twee manieren worden berekend.

Methode 1
We kennen de waarde van de rente na 10 jaar. De waarde na 15 jaar is te vinden door ƒ 1582,41 5 jaar op te renten.

ƒ 1582,41 × $1{,}082^5$ (S58,2 = 1,482983448) = ƒ 2346,69.

Methode 2
De waarde van de rente is ook te berekenen door de bedragen rechtstreeks te valuteren op de gekozen peildatum.

0838-0411

$$E_{15} = f\,100,\!- \; (1{,}082^{15} + 1{,}082^{14} + 1{,}082^{13} + \ldots + 1{,}082^{6})$$

$$1{,}082 \times E = f\,100,\!- \; (1{,}082^{16} + 1{,}082^{15} + 1{,}082^{14} + \ldots + 1{,}082^{7})$$

$$0{,}082 \times E = f\,100,\!- \; (1{,}082^{16} - 1{,}082^{6})$$

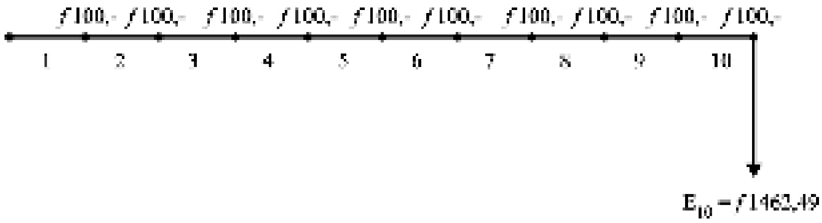
$$E_{15} = f\,100,\!- \; \frac{1{,}082^{16} - 1{,}082^{6}}{0{,}082} \left(= f\,100,\!- \; \frac{(s_{\overline{16}|8,2} - s_{\overline{6}|8,2})}{0{,}082} \right)$$

De waarde van de rente ultimo jaar 15, 6 jaar na het vervallen van de laatste termijn, bedraagt ƒ 100,— × 23,46690335 = ƒ 2346,69.

Het is nu mogelijk ten aanzien van de gelijkwaardigheid of equivalentie van geldbedragen soortgelijke conclusies te trekken als in paragraaf 7.1. Bijvoorbeeld: de waarde van een rente met 10 jaartermijnen ad ƒ 100,— is één jaar na het vervallen van de laatste termijn ƒ 1582,41; deze waarde is equivalent met de waardering van de rente 6 jaar na het vervallen van de laatste termijn ad ƒ 2346,69. Deze bedragen zijn alle berekend voor p = 8,2% per jaar.

Vergelijk de hiervoor behandelde rente nog eens met de rente die we in paragraaf 6 aan de orde stelden. Ook die rente had een tiental termijnen van elk ƒ 100,—, terwijl de rentevergoeding eveneens 8,2% per jaar bedroeg. De termijnen vervielen echter aan het *einde* van een jaar. Hoe verhouden deze *postnumerando* rente en de in deze paragraaf behandelde *praenumerando* rente zich tot elkaar? Voor het beantwoorden van deze vraag moet u op de waarde van beide renten na het tiende jaar letten. Ter verduidelijking geven we van beide situaties de tijdlijn. De tijdlijn postnumerando rente ziet er als volgt uit.

0838-0412



De waarde ad ƒ 1462,49 hebben we in paragraaf 6 berekend vanuit de formulering

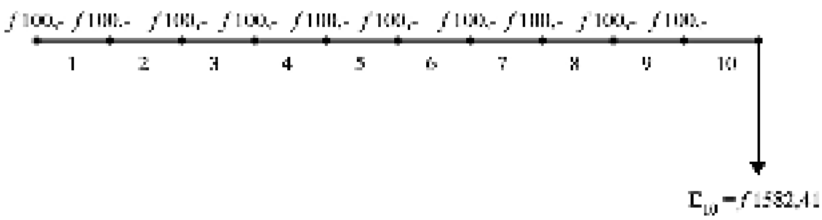
$$E_{10} = ƒ\ 100,\text{—} \times \frac{1{,}082^{10} - 1}{0{,}082}$$

Deze formulering resulteerde na toepassing van de eliminatiemethode op de vergelijking voor de probleemoplossing.

$E_{10} = ƒ\ 100,\text{—} \times 1{,}082^{9} + ƒ\ 100,\text{—} \times 1{,}082^{8} + \ldots + ƒ\ 100,\text{—} \times 1{,}082 + ƒ\ 100,\text{—}$.

De tijdlijn voor de praenumerando rente ziet er als volgt uit.

0838-0413



Voor de oplossing van dit probleem vonden we in deze paragraaf

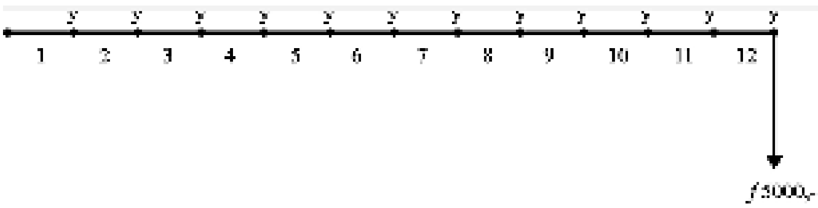
E_{10} = ƒ 100,— × $1{,}082^{10}$ + ƒ 100,— × $1{,}082^{9}$ + ƒ 100,— × $1{,}082^{8}$ + . . . + ƒ 100,— × $1{,}082^{1}$

en vervolgens E_{10} = ƒ 100,— × $\dfrac{1{,}082^{11} - 1{,}082}{0{,}082}$.

De waarde van de praenumerando rente is precies 8,2% groter dan de waarde van de postnumerando rente:
8,2% van ƒ 1462,49 = ƒ 119,92.
Dit is ook weer te geven als: ƒ 1462,49 × 1,082 = ƒ 1582,41.
Het verschil zit in de één jaar langere looptijd van de termijnen van de praenumerando rente, terwijl de rentevergoeding 8,2% per jaar bedraagt: de termijnen zijn één jaar langer rentedragend.

Voorbeeld
Iemand betaalt aan het einde van elk jaar ƒ 5000,— premie voor een lijfrenteverzekering. Daartoe stort hij aan het einde van iedere maand vanaf uw salarisrekening een gelijk bedrag op een spaarrekening met een maandrente van 0,5% (SI).
Bepaal de grootte van de maandstorting.

0838-0414



$$ƒ5000,- = y\,(1{,}005^{11} + 1{,}005^{10} + 1{,}005^{9} + \ldots + 1)$$

$$1{,}005 \times ƒ5000,- = y\,(1{,}005^{12} - 1{,}005^{11} + 1{,}005^{10} - \ldots + 1{,}005^{1})$$

$$0{,}005 \times ƒ5000,- = y\,(1{,}005^{12} - 1)$$

$$y = \frac{ƒ25,-}{1{,}005^{12} - 1} = ƒ405{,}33$$

7.3. (Interne) rendementsberekeningen

In paragraaf 7 hebben we (interne) rendementsberekeningen gerangschikt onder de contante-waardeberekeningen. Nu is het verschil tussen contante-waardeberekeningen en eindwaardeberekeningen slechts gering. Contante-waardeberekeningen en eindwaardeberekeningen zijn gebaseerd op respectievelijk het afrenten en oprenten van geldbedragen; en deze bewerkingen zijn te vergelijken met eeneiige tweelingen.
De keuze tussen afrenten en oprenten is afhankelijk van de keuze van het valutamoment. Veel rendementsberekeningen geschieden in het kader van investerings- en beleggingsbeslissingen, waarbij toekomstige ontvangsten centraal staan. Deze toekomstige waarden kunnen gebaseerd zijn op verwachtingen – bijvoorbeeld investeringsprojecten en beleggingen in aandelen – en op (vrij) zekere ontvangsten – bijvoorbeeld beleggingen in obligaties.
Wanneer men toekomstige waarden wil vergelijken met huidige waarden – bijvoorbeeld de aankoopprijs van obligaties of voor de beoordeling van een investeringsproject – is het logisch te kiezen voor contante-waardeberekeningen. Toch is het niet zo dat alle rendementsberekeningen neerkomen op contante-waardeberekeningen. Wie zoals P. Cunia (zie par. 5) het uiteindelijk rendement op een belegging wil berekenen, zal zich baseren op de eindwaarde van de desbetreffende belegging.

Voorbeeld

Een onderneming beoordeelt investeringsprojecten onder meer op basis van de methode van het interne rendement. Het intern rendement is die rentevoet, waarbij de contante waarde van de kasoverschotten en de investeringsuitgave aan elkaar gelijk zijn. Een bepaald investeringsproject vergt een initiële investeringsuitgave van *ƒ* 160.000,—. De ondernemer verwacht in de komende acht jaren aan het einde van elke maand kasoverschotten ten bedrage van *ƒ* 3000,—.
We berekenen het interne rendement (p_r) van het investeringsproject op jaarbasis, in twee decimalen nauwkeurig.

0838-0415

$$160.000 = 3.000 \times \left\{ (1 + i_r)^{-1/12} + (1 + i_r)^{-2/12} + \ldots + (1 + i_r)^{-36/12} \right\}$$

$$160.000 \times (1 + i_r)^{1/12} = 3.000 \times \left\{ 1 + (1 + i_r)^{-1/12} + \ldots + (1 + i_r)^{-35/12} \right\}$$

$$160.000 \times \left\{ (1 + i_r)^{1/12} - 1 \right\} = 3.000 \times \left\{ 1 - (1 + i_r)^{-3} \right\}$$

$$160.000 = 3.000 \times \frac{1 - (1 + i_r)^{-3}}{(1 + i_r)^{1/12} - 1}$$

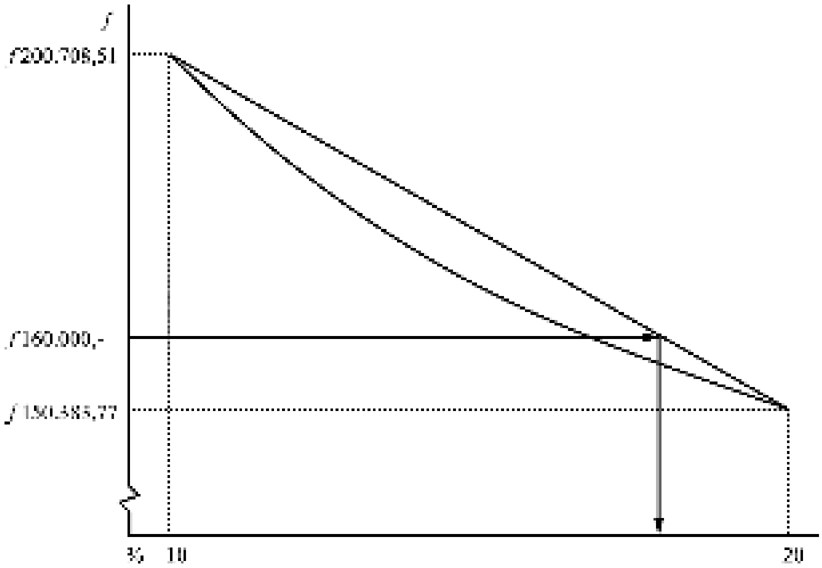
De desbetreffende waarde voor deze onoplosbare vergelijking kunnen we vinden met gebruikmaking van lineaire interpolatie.

We moeten nu een zodanige waarde voor p_r vinden dat het rechterlid van de vergelijking (stel deze waarde op P) gelijk wordt aan ƒ 160.000,—.
Voor een eerste (grove) benadering van het interne rendement zijn bijvoorbeeld de ruime grenzen $p_r = 10\%$ en $p_r = 20\%$ mogelijk.
$p_r = 10\% \rightarrow P = ƒ\ 200.708{,}51$
$p_r = 20\% \rightarrow P = ƒ\ 150.383{,}77$

$$p_r = 10\% + \frac{ƒ\ 200.708{,}51 - ƒ\ 160.000{,}—}{ƒ\ 200.708{,}51 - ƒ\ 150.383{,}77} \times 10\% = 18{,}09\%$$

Deze (benaderde) waarde van p_r is te hoog omdat deze benadering is gebaseerd op een rechtlijnig verband tussen de gekozen polen (hetgeen niet het geval is bij samengestelde interest). Dit valt nog eens af te lezen uit de hierna volgende grafische weergave van de lineaire interpolatie.

0838-0416



Stel vervolgens de nieuwe grenzen voor p_r, bijvoorbeeld 18,1% en 17,1%.
p_r = 18,1% → P = ƒ 158.114,26
p_r = 17,1% → P = ƒ 162.476,47

$$p = 17{,}1\% + \frac{ƒ\ 162.476{,}47 - ƒ\ 160.000{,}—}{ƒ\ 162.476{,}47 - ƒ\ 158.114{,}26} \times 1\% = 17{,}667\%$$

Deze waarde is nauwkeuriger dan we in eerste instantie vonden, omdat het interpolatie-interval, en daarmee de afwijking, is verkleind. Het is vervolgens beter 17,667% niet op de gebruikelijke wijze af te ronden op 17,67% (de nauwkeurigheidseis bedraagt twee decimalen), omdat we weten dat 17,667% al aan de hoge kant is.
Indien p_r = 17,67% geldt P = ƒ 159.963,88.
Voor p_r = 17,66% geldt P = ƒ 160.007,46; deze waarde van p_r benadert het interne rendement van het investeringsproject het nauwkeurigst.

7.4. Nominale en reële rente

In de praktijk komt het nog al eens voor dat de nominale (= opgegeven) rente niet gelijk is aan de reële (= feitelijke) rente. Dit is bijvoorbeeld het geval bij hypothecaire geldleningen indien de periodiek verschuldigde rente op andere wijze wordt betaald dan het periodieke rentepercentage doet vermoeden. De contractueel over-

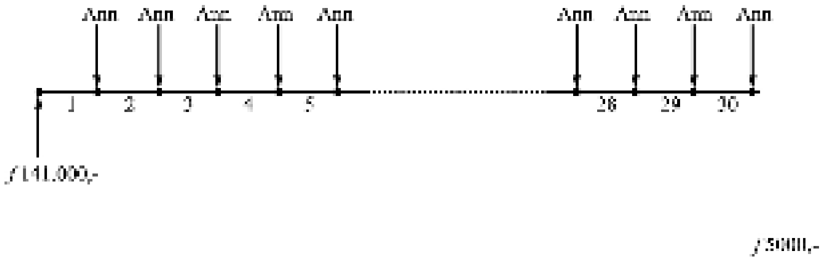
eengekomen, nominale rente ter grootte van 9% per jaar kan door de geldgever worden opgeëist in maandbetalingen van 0,75%. De geldnemer betaalt dan reëel gezien meer dan 9%.
We zullen de hiervoor gesignaleerde verschillen illustreren aan de hand van een voorbeeld dat is ontleend aan de praktijk. In dit voorbeeld wordt een bepaalde variant uitgewerkt, waarbij door de omzetting van jaartermijnen naar maandtermijnen de opgegeven rente niet gelijk is aan de feitelijke rente die door de geldnemer (= hypotheekgever!) wordt betaald. Na deze variant zullen we ook bij een alternatieve vorm en de optredende verschillen stilstaan.

Voorbeeld
Een particulier heeft een hypotheeklening ter grootte van *ƒ* 141.000,— gesloten met een looptijd van 30 jaar. De lening wordt in 30 jaar annuïtair afgelost op basis van 9,2% per jaar. De op jaarbasis vastgestelde annuïteit (Ann) wordt betaald in de vorm van gelijke maandtermijnen en wel aan het einde van elke maand. De rentevergoeding bedraagt daardoor in feite meer dan 9,2% per jaar. We berekenen nu achtereenvolgens:
1. de jaarannuïteit en de hieruit af te leiden maandtermijnen;
2. het reële rentepercentage per jaar in één decimaal nauwkeurig.

Ad 1. Berekening van de jaarannuïteit en de hieruit af te leiden maandtermijnen.
Een annuïteit is (in principe) een gelijkblijvend, jaarlijks te betalen bedrag, waarmee de vereffening van de verschuldigde rente en de aflossing van een lening plaatsvindt. De som van die periodieke rente en aflossing (annuïteit) is constant. Iemand die een annuïtaire lening afsluit van *ƒ* 141.000,— tegen 9,2% SI per jaar zal door 30 jaarlijkse betalingen van *ƒ* 13.968,48 aan al zijn verplichtingen hebben voldaan. De jaarlijkse annuïteit *ƒ* 13.968,48 bestaat uit twee componenten, namelijk een aflossingsbestanddeel (de lening van *ƒ* 141.000,— moet toch worden afgelost) en een rentebestanddeel (lenen kost geld).
Dit bedrag kunnen we berekenen op basis van het equivalentiebeginsel. Onder het equivalentiebeginsel verstaan we de gelijke waardering van de prestatie(s) van de geldgever en de prestatie(s) van de geldnemer; deze waardering dient voor prestaties in de toekomst te gebeuren op basis van de contractueel overeengekomen rente. Want juist op basis van deze contractrente komt de overeenkomst tussen geldgever en geldnemer tot stand. Een overeenkomst impliceert dat de geldgever de prestaties die de geldnemer zal verrichten, ten minste van gelijke waarde (equivalent) acht als de lening die hij nu ver-

strekt. De geldnemer is op zijn beurt bereid in de komende periode aan de verplichting tot het betalen van rente en aflossing te voldoen, omdat hij aan deze toekomstige betalingen geen hogere waarde toekent dan de grootte van de lening.
De tijdas van het gegeven voorbeeld ziet er als volgt uit. Hierbij is als uitgangspunt de *jaar*annuïteit genomen omdat de contractrente in een percentage *per jaar* is uitgedrukt.

0838-0417



Voor de berekening van de jaarlijkse anuuïteit (Ann) is het moment waarop een annuïteit vervalt, belangrijk. De geldgever kent aan de eerste annuïteit een hogere waarde toe dan aan de achtste annuïteit. Evenzo betaalt de geldnemer liever een bedrag over dertig jaar dan over één jaar. Deze verschillen in tijd komen tot uitdrukking in een kortere of langere afrentingsperiode. Valutering van de achtereenvolgende annuïteiten op het moment waarop de lening van ƒ 141.000,— tegen 9,2% interest per jaar wordt verstrekt, geeft de volgende (equivalentie)vergelijking.

0838-0418

$$f\,141.000,- = \text{Ann} \times \left(\frac{1}{1,092} + \frac{1}{1,092^2} + \ldots\ldots + \frac{1}{1,092^{29}} + \frac{1}{1,092^{30}}\right)$$

$$f\,141.000,- \times 1,092 = \text{Ann} \times \left(1 + \frac{1}{1,092} + \ldots\ldots + \frac{1}{1,092^{28}} + \frac{1}{1,092^{29}}\right)$$

$$0,092 \times f\,141.000,- = \text{Ann} \times \left(1 - \frac{1}{1,092^{30}}\right)$$

$$\text{Ann} = \frac{f\,12.972,-}{1 - 1,092^{-30}} = f\,13.968,48$$

De maandelijkse termijn wordt: $\frac{f\,13.968,48}{12} = f\,1.164,04.$

Ad 2. Berekening van het reële rentepercentage per jaar in één decimaal nauwkeurig.
Doordat de annuïteit, gegeven een rentepercentage per jaar, op jaarbasis wordt berekend, is het element van de maandtermijnen in het voorgaande niet van belang. Het feit echter dat de jaarannuïteit voor het overgrote deel eerder wordt betaald dan aan het einde van het jaar, betekent wel dat de werkelijke rente hoger is dan 9,2% per jaar. Zoals we in paragraaf 7.1.3 al hebben gezien, is dit „interne rendement" te berekenen uit:

$$f\ 141.000,\text{—} = f\ 1164{,}04 \times (1 + i_r)^{-\frac{1}{12}} (1 + i_r)^{-\frac{2}{12}} - + \ldots + (1 + i_r)^{-\frac{360}{12}}$$

Het interne rendement, de werkelijke rente, bedraagt ongeveer 9,7% per jaar. Ter toelichting hierop volgt nu de onderliggende berekening, waarbij de *feitelijke rente* de disconteringsvoet is voor de *feitelijke betalingen.*

0838-0419

$$f\ 141.000,\text{-} = f1.164{,}04\% \left\{ (1 + i_r)^{-1/12} + (1 + i_r)^{-2/12} + \ldots + (1 + i_r)^{-359/12} \right\}$$

$$f\ 141.000,\text{-} \times (1 + i_r)^{-1/12} = f1.164{,}04 \times 1 + \left\{ (1 + i_r)^{-1/12} + \ldots + (1 + i_r)^{-359\ 12} \right\}$$

$$\left\{ (1 + i_r)^{-1/12} - 1 \right\} \times f\ 141.000,\text{-} = f1.164{,}04 \times \left\{ 1 - (1 + i_r)^{-30} \right\}$$

$$f\ 141.000,\text{-} = f1.164{,}04 \times \frac{1 - (1 + i_n)^{-30}}{(1 + i_r)^{-1/12} - 1}$$

Stel het rechterlid van de vergelijking op P.
Voor pr = 9,2% geldt P = *f* 146.851,- en
Voor pr = 10% geldt P = *f* 137.611,14

%	10	?	y	9,2
	X137.611,14	141.000,-		146.051,-

$$\frac{y}{10–9{,}2} = \frac{146.851,\text{-} - 141.000,\text{-}}{146.851,\text{-} - 137.611{,}14}$$

$$y = 0{,}8 \times \frac{5.851,\text{-}}{9.239{,}86} \longrightarrow y = 0{,}506587762$$

Conclusie: P = (9,2 + 0,506587762) %, afgerond 9,7% en dus niet 9,2%!

Opmerking
Vanzelfsprekend is de huidige waarde van de maandtermijnen bij 9,2% groter dan *f* 141.000,— (zijnde de contante waarde van de

jaarannuïteit gedisconteerd tegen deze rentevoet): het overgrote deel van de betalingen vindt nu eerder in het jaar plaats.
Wellicht ten overvloede laten we nu ook nog zien welke consequenties een praenumerando betaling van de maandtermijn van *ƒ* 1164,04 voor de effectief te betalen jaarrente heeft.

0838-0420

$$f\,141.000,- = f\,1.164,04 \times \left\{ 1 + (1 + i_r)^{-1/12} + (1 + i_r)^{-2/12} + \ldots\ldots\ldots + (1 + i_r)^{-11/12} \right\}$$

$$f\,141.000,- \times (1 + i_r)^{-1/12} = f\,1.164,04 \times \left\{ (1 + i_r)^{-1/12} + (1 + i_r)^{-2/12} + \ldots + (1 + i_r)^{-12/12} \right\}$$

$$\left\{ (1 + i_r)^{-1/12} - 1 \right\} \times f\,141.000,- = f\,1.164,04 \times \left\{ (1 + i_r)^{-1/12} - (1 + i_r)^{-12/12} \right\}$$

$$f\,141.000,- = f\,1.164,04 \times \frac{(1 + i_r)^{-1/12} - (1 + i_r)^{-12/12}}{(1 + i_r)^{-1/12} - 1}$$

Bij Pr = 9,8%: *ƒ* 141.915,45 (verschil als gevolg van afgerond percentage).
De werkelijke rente ligt nu nog iets hoger dan bij een postnumerando maandtermijn

Opmerking
De hiervoor geformuleerde vergelijking kan ook worden vermenigvuldigd met $(1 + i_r)^{-1/12}$
De uiteindelijke vorm is dan eenvoudiger, de uitkomst verandert natuurlijk niet.

0838-0421

$$f\,141.000,- = f\,1.164,04 \times \left\{ 1 + (1 + i_r)^{-1/12} + \ldots\ldots + (1 + i_r)^{-10/12} + (1 + i_r)^{-11/12} \right\}$$

$$f\,141.000,- \times (1 + i_r)^{1/12} = f\,1.164,04 \times \left\{ (1 + i_r)^{1/12} + 1 + (1 + i_r)^{-1/12} + \ldots\ldots + (1 + i_r)^{-10/12} \right\}$$

$$\left\{ 1 - (1 + i_r)^{1/12} \right\} \times f\,141.000,- = f\,1.164,04 \times \left\{ 1 - (1 + i_r)^{-11/12} \right\}$$

$$f\,141.000,- = f\,1.164,04 \times \frac{1 - (1 + i_r)^{-11/12}}{1 - (1 + i_r)^{1/12}}$$

Een alternatieve omzetting van jaarbetalingen op basis van jaarrente naar maandtermijnen berust op een *evenredige* herberekening van het jaarpercentage naar een maandpercentage. Men baseert zich daarmee, zoals we al in paragraaf 5.5.3. hebben gezien, op de beginselen van enkelvoudige interest. Ook hierdoor zal de feitelijke rente boven de nominale rentevergoeding komen te liggen.
Deze variant betekent in ons voorbeeld de volgende rente:

$$\frac{\text{p jaar}}{12} = \text{p maand, in casu } \frac{9{,}2\%}{12} = 0{,}7666\ldots\%.$$

Het interestpercentage voor de equivalentievergelijking is dus 0,007666 . . .
Gaan we uit van postnumerando maandtermijnen, dan luidt de equivalentievergelijking als volgt:

$ƒ\,141.000,\text{—} = \text{Ann}_m \times \{ (1 + i_m)^{-1} + (1 + i_m)^{-2} + \ldots + (1 + i_m)^{-360} \}$ zodat

$$* \quad ƒ\,141.000,\text{—} = \text{Ann}_m \times \frac{1 - (1 + i_m)^{-360}}{i_m}$$

$\text{Ann}_m = ƒ\,1154{,}87$

0838-0422

$$ƒ\,141.000,\text{-} = \text{Ann}_m \times \{ (1 + i_m)^{-1} + (1 + i_m)^{-2} + \ldots\ldots + (1 + i_m)^{-360} \}$$

$$ƒ\,141.000,\text{-} \times (1 + i_m) = \text{Ann}_m \times \{ 1 + (1 + i_m)^{-1} + (1 + i_m)^{-2} + \ldots\ldots + (1 + i_m)^{-359} \}$$

$$i_m \times ƒ\,141.000,\text{-} = \text{Ann}_m \times \{ 1 - (1 + i_m)^{-360} \}$$

De berekening van de effectieve jaarrente verloopt nu eenvoudig, conform de opzet in paragraaf 5.5.3, als volgt:

$(1 + i_m)^{12} = 1 + 1 \text{ jaar}$

$$\left(1 + \frac{0{,}092}{12}\right)12 = 1 + 1 \text{ jaar} \rightarrow 1 + 1 \text{ jaar} = 1{,}09598$$

p jaar = 9,598%, afgerond 9,6% en dus niet 9,2%!

Controle

0838-0423

$$f\,141.000,- \stackrel{?}{=} f\,1.154,87 \times \left(1{,}096^{-\frac{1}{12}} + 1{,}096^{-\frac{2}{12}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1{,}096^{-\frac{360}{12}}\right)$$

$$f\,141.000,- \stackrel{?}{=} f\,1.154,87 \times \frac{1 - 1{,}096^{-30}}{1{,}096^{\frac{1}{12}} - 1}$$

f 140.977,69

Het verschil met het bedrag van de lening ad f 141.000,— is ontstaan door afronding van het percentage.
Het is natuurlijk weer mogelijk de maandtermijnen praenumerando (aan het begin van de maand) te voldoen. De berekening van de dan geldende maandannuïteiten en van de controle op de (ongewijzigde) effectieve rente geven we hierna.

0838-0424

$$f\,141.000,- = \text{Ann}_m \times \left\{1 + (1 + i_m)^{-1} + (1 + i_m)^{-2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + (1 + i_m)^{-359}\right\}$$

$$f\,141.000,- = \text{Ann}_m \times \frac{(1 + i_m) - (1 + i_m)^{-359}}{i_m}$$

$$\text{Ann}_m = f\,1.146,08$$

Controle

$$f\,141.000,- \stackrel{?}{=} f\,1.146,08 \times \left(1 + 1{,}096^{-\frac{1}{12}} + 1{,}096^{-\frac{2}{12}} + \ldots\ldots\ldots\ldots + 1{,}096^{-\frac{359}{12}}\right)$$

$$f\,141.000,- \stackrel{?}{=} f\,1.146,08 \times \frac{1{,}096^{\frac{1}{12}} - 1{,}096^{-\frac{359}{12}}}{1{,}096^{\frac{1}{12}} - 1}$$

f 140.977,49

of, na vermenigvuldiging met $1{,}096^{-\frac{1}{12}}$ (in plaats van $1{,}096^{\frac{1}{12}}$):

$$f\,141.000,- \stackrel{?}{=} 1.146,08 \times \frac{1 - 1{,}096^{-30}}{1 - 1{,}096^{-\frac{1}{12}}}$$