Knelpuntscalculatie

drs. P. W. Boone[1]

1 De heer Boone is werkzaam als docent bedrijfseconomie bij de Economische Faculteit van de Vrije Universiteit van Amsterdam.

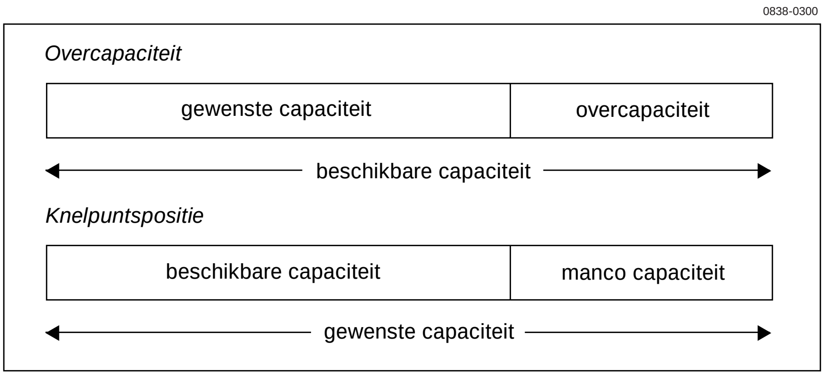
1 Inleiding

Bij het nemen van beslissingen dient men te letten op de *relevante* opbrengsten en kosten; dat zijn de opbrengsten en kosten die veranderen als gevolg van een beslissing. Bij beslissingscalculaties voor de korte termijn gaat men vaak uit van een gegeven (productie)capaciteit, met de bij die capaciteit behorende constante kosten. Voor de korte termijn is het uitgangspunt dan ook meestal dat alleen de variabele kosten veranderen en dat de constante kosten ongewijzigd blijven. De constante kosten zijn dan dus niet relevant. Kosten die op korte termijn niet veranderen en derhalve buiten de calculatie blijven, kunnen echter wel relevant worden als de tijdhorizon verder komt te liggen; op de lange termijn zijn alle kosten variabel. De leiding van een onderneming heeft in dat verband de taak om te beslissen welke producten of diensten er met de beperkte, beschikbare productiemiddelen dienen te worden voortgebracht. Anders gezegd: wat is het beste alternatief?

In deze bijdrage wordt aandacht besteed aan de knelpuntscalculatie. Allereerst zal het begrip knelpunt worden gedefinieerd. Daarna wordt er, met behulp van een aantal voorbeelden, ingegaan op enkele factoren die van invloed zijn op knelpuntssituaties en vervolgens komt de vraag aan de orde op welke wijze een beschikbare capaciteit het best kan worden benut, indien er sprake is van een knelpuntssituatie. Ten aanzien van deze vraag over het toewijzen (alloceren) van de middelen zal uitgebreid worden ingegaan op lineaire programmering, waarbij ook aandacht wordt besteed aan het begrip schaduwprijs. Ten slotte wordt ingegaan op een aantal concrete toepassingen van lineaire programmering en de schaduwprijs.

2 Knelpunten

De term knelpunt, en in het bijzonder knelpuntscalculatie, komen we in de Nederlandse literatuur voor het eerst tegen bij H. J. van der Schroeff. Overcapaciteit en knelpunt vormen tegengestelde situaties. Er is sprake van een *overcapaciteit,* indien de beschikbare capaciteit slechts ten dele een aanwendingsmogelijkheid heeft. Er is daarentegen sprake van een *knelpuntspositie,* indien (een onderdeel van) de beschikbare capaciteit een beperking oplegt aan de omvang van de productie en/of afzet en de capaciteit niet op korte termijn kan worden aangepast. Een knelpuntssituatie kan zich voordoen bij één productiemiddel, of bij een groep van productiemiddelen. Bovendien zullen de knelpunten van periode tot periode steeds anders (kunnen) komen te liggen: oude knelpunten worden opgelost en er komen mogelijk weer nieuwe voor in de plaats. Overcapaciteit en knelpunt worden door Van der Schroeff[1] als volgt schematisch tot uitdrukking gebracht:



Figuur 1. Overcapaciteit en knelpunt.

Een productiemiddel met een capaciteit die kleiner is dan de gewenste capaciteit vormt een knelpuntsfactor. Voorbeelden van knelpuntssituaties zijn:
– een tekort aan geschoold personeel;
– een tekort aan machinecapaciteit;
– een tekort aan grondstoffen;
– een tekort aan opslagruimte;
– een tekort aan financiële middelen (c.q. vermogen).

Karakteristiek voor knelpunten is dat de capaciteit van een afdeling, of van een hele onderneming, in een bepaalde periode afhankelijk is van de capaciteit van de knelpuntsfactor.

De eerste vraag is: op welke wijze kunnen eventuele knelpunten worden voorkomen en/of worden weggewerkt? Bij investeringsbeslissingen zal de leiding van een onderneming om te beginnen de capaciteit moeten afstemmen op de verwachte behoeften en daarbij ook de deelcapaciteiten steeds zo goed als mogelijk is onderling op elkaar moeten afstemmen. Vervolgens zal men door een efficiënte benutting van de beschikbare capaciteit proberen te voorkomen dat er knelpunten ontstaan en indien noodzakelijk de capaciteit op be-

1 Schroeff, H. J. van der, *Kosten en kostprijs*, Kosmos, Amsterdam/Antwerpen, 1980.

paalde plaatsen aanpassen. Maar hoe goed de leiding van een onderneming ook probeert om bepaalde knelpuntssituaties te voorkomen, toch zal men in een sterk dynamische omgeving worden geconfronteerd met knelpuntssituaties.

Gegeven een knelpuntssituatie is de tweede vraag: op welke wijze kan de onderneming het best de beschikbare capaciteit benutten? Welke producten zal men voortbrengen met de beschikbare capaciteit? Ten aanzien van de productiecapaciteit zullen we hierna de volgende twee vragen aan de orde stellen:
1. Welke factoren zijn van invloed op knelpuntssituaties?
2. Hoe kan de gegeven productiecapaciteit het best worden benut, indien er sprake is van een knelpuntssituatie?

3 Enkele factoren die van invloed zijn op knelpuntssituaties

Menselijke beperkingen bestaan onder meer uit het onvermogen om in een nog hoger tempo te reageren, te presteren, of bepaalde zaken te begrijpen. Door het aantrekken van de juiste hoeveelheid mensen op het juiste moment voor de juiste taak en door training kunnen knelpunten op dat terrein vaak worden beperkt, maar nooit helemaal voorkomen. Echter, technische installaties zoals machines en computers nemen meer en meer het aandeel van de factor arbeid in het productieproces over, waardoor knelpunten bij technische installaties steeds belangrijker worden. De knelpunten bij die technische installaties leiden tot ‘bottlenecks’, waardoor het productieproces niet in het gewenste tempo kan plaatsvinden. De snelheid van de langzaamste installatie bepaalt in feite het gehele tempo van de productie. Zelfs in volledig geautomatiseerde fabrieken kunnen ‘bottlenecks’ optreden, omdat niet alle installaties hetzelfde tempo en een even grote capaciteit hebben. Een belangrijke taak voor het management is derhalve het opsporen en wegnemen van ‘bottlenecks’.

Een belangrijk gevolg voor een bedrijf met knelpunten is onder meer dat grote voorraden (grondstoffen, halfproducten en eindproducten) en lange levertijden, doorlooptijden of wachttijden ontstaan. Er zijn tal van technieken om de investeringen van ondernemingen in voorraden te minimaliseren. Zo kan men, rekening houdend met onder andere levertijden en veiligheidsvoorraden, berekenen bij welke bestelgrootte c.q. seriegrootte, de totale voorraadkosten minimaal zijn. Het nadeel van deze methode is dat de onderlinge samenhang van de verschillende voorraden vaak buiten beschouwing blijft. ‘Materials requirements planning’ (MRP) heeft betrekking op de planning van de grondstoffen in hun onderlinge samenhang: welke materialen en hoeveel materialen zijn er nodig op een bepaald moment? MRP is in feite een model voor voorraadbeheersing, waarin ‘Program evaluation review techniques’ (PERT) en de ‘Critical path method’ (CPM) zijn geïntegreerd. Later is MRP uitgebreid tot ‘Manufacturing resource planning’, waarbij niet alleen de materialen, maar bijvoorbeeld ook de arbeid en de machine-uren in de planning van productie en afzet worden opgenomen. Deze complexe vormen van planning vereisen krachtige computers, goede software en een gedetailleerde input. Deze modellen zijn in feite ‘push’-systemen, waarbij voorraden bestaan, ook al zijn die niet onmiddellijk nodig. Bij ‘Just-in-time’ (JIT) daarentegen is er sprake van een ‘pull’-systeem. Een onderdeel wordt pas gekocht of gemaakt als het nodig is; de vraag is dus bepalend. De JIT-methode vereist dat er tijdens het productieproces geen defecte onderdelen worden aangetroffen, omdat anders het productieproces moet worden stilgelegd. Kwaliteit is derhalve een belangrijke voorwaarde om knelpunten te voorkomen en kwaliteitseisen gelden voor zowel de leveranciers als het eigen productieproces. Verder vereist JIT dat het productieproces gemakkelijk van het ene product op het andere kan overschakelen. In E1400 van dit Handboek wordt, door Van Lierop en De Vaan, uitgebreid aandacht besteed aan voorraadbeheer (onder andere aan JIT).

Zoals hiervoor al gezegd is, bepaalt de snelheid van de langzaamste machine in feite het hele tempo van de productie. Goldratt en Cox hebben in hun boek *The goal*[1] een ‘Theory of constraints’ (theorie van de knelpunten) geïntroduceerd. Deze theorie richt zich op het belangrijkste doel van het produceren: ‘to make money’. Om te meten in hoeverre een onderneming dat doel bereikt, onderscheiden zij de volgende drie belangrijke maatstaven:
– de doorvoer;
– de voorraden;
– de bedrijfskosten.

Het doel is om de doorvoer *(throughput)* te maximaliseren, terwijl daarbij dan gelijktijdig de voorraden en de bedrijfskosten gelijk blijven of zelfs afnemen, gegeven de bestaande ‘bottlenecks’. Een productiemiddel dat geen ‘bottleneck’ vormt, moet niet meer produce-

1 Goldratt, Eliyahu and Jeff Cox, *The goal*, North River Press, Inc, Croton-on-Hudson, N.Y., 1986.

ren dan de capaciteit van een productiemiddel dat wel een ‘bottleneck’ vormt. Stel dat de output van productiemiddel 1 slechts voor 75% kan worden opgenomen door productiemiddel 2 dat daarop volgt. Anders gezegd: productiemiddel 2 vormt een ‘bottleneck’. Benutting van de gehele capaciteit van productiemiddel 1 zou slechts voorraadvorming ten gevolge hebben, zodat het efficiënter is om van productiemiddel 1 slechts 75% van de capaciteit te benutten. Niet de bezetting van de capaciteit, maar de doorstroming van de goederen is een goede indicator voor de winstgevendheid van een onderneming. De doorvoer kan men als volgt berekenen:

Productiecapaciteit × productietijd × productierendement = doorvoer

De *productiecapaciteit* geeft aan hoeveel producten in een bepaalde periode geproduceerd kunnen worden. Daarbij veronderstelt men dat alle in bewerking genomen producten ook gereedkomen en worden goedgekeurd. Men rekent dus niet met uitval en stilstand. De *productietijd* geeft aan welke tijd echt is besteed aan de waardetoevoeging. Het *productierendement* geeft aan welk gedeelte van de productie is goedgekeurd. Men kan de doorvoer ook als volgt berekenen:

$$\frac{\text{Totale productie}}{\text{Productietijd}} \times \frac{\text{Productietijd}}{\text{Totale tijd}} \times \frac{\text{Goedgekeurde productie}}{\text{Totale productie}} = \frac{\text{Goedgekeurde productie}}{\text{Totale tijd}}$$

Voorbeeld 1

Een onderneming heeft over 1994 de volgende gegevens verzameld voor de afdeling assemblage:

– totale productie in eenheden	600.000
– goedgekeurde productie in eenheden	568.800
– totale productietijd	1.275.000 uren
– totaal beschikbare productietijd	1.500.000 uren

Op basis van deze gegevens maken we de volgende berekening:

Productiecapaciteit × productietijd × productierendement = doorvoer

$$\frac{600.000}{1.275.000} \times \frac{1.275.000}{1.500.000} \times \frac{568.800}{600.000} = \frac{568.800}{1.500.000}$$

0,4706 × 0,85 × 0,948 = 0,3792.

De doorvoer is dus meer dan eenderde eenheid per uur, ofwel één eenheid in minder dan drie uur (2,637 uur).

Om te bepalen in hoeverre de doorvoer bijdraagt aan de winst, berekent men de dekkingsbijdrage van de doorvoer. Deze is:

opbrengsten minus directe materiaalkosten.

Deze dekkingsbijdrage is een bijzondere vorm van variabele kostencalculatie, waarbij het uitgangspunt is dat voor de korte termijn alleen de opbrengsten en de materiaalkosten relevant zijn en dat alle overige bedrijfskosten vast zijn. Men spreekt ook wel over 'super-variable costing'. Indien de afdeling assemblage binnen een bedrijf een knelpunt ('bottleneck') vormt, dan leidt een verbetering van de doorvoer in die afdeling tot een verbetering van de genoemde dekkingsbijdrage. Zie hiervoor ook Horngren[1] in de hoofdstukken 9 en 23 bij het begrip *throughput contribution*.

4 Capaciteitsbenutting in knelpuntssituaties

Bij capaciteitsbenutting in knelpuntssituaties gaat het er niet om de benodigde capaciteit in de tijd te plannen, maar om productie en afzet te plannen met het oog op een optimaal gebruik van de aanwezige capaciteit.

Ten aanzien van de gegeven productiecapaciteit maken we onderscheid tussen:
1. een productiecapaciteit met één knelpunt;
2. een productiecapaciteit met meer dan één knelpunt.

Ad 1. Een productiecapaciteit met één knelpunt
We gebruiken het volgende voorbeeld om aan te geven hoe de keuze moet worden gemaakt in het geval van één knelpunt.

Voorbeeld 2
Een onderneming maakt gebruik van houten platen als grondstof voor drie producten. Voor elk product is één houten plaat nodig. De onderneming koopt deze houten platen in voor *f* 75,— per stuk en er zijn voldoende houten platen te koop.

De overige directe productiekosten bestaan uit arbeidskosten, à *f* 80,— per uur. De benodigde arbeidsuren voor de productie zijn: 1 uur voor product A, 1,25 uur voor product B en 2 uur voor product C. De onderneming heeft per kwartaal slechts de beschikking over 1920 uren arbeid. Verder heeft de onderneming ieder kwartaal nog *f* 9.600,— vaste indirecte productiekosten.

1 Horngren, Charles T., George Foster and Srikant M. Datar, *Cost Accounting: A Managerial Emphasis*, Eighth Edition, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ 07632, 1994.

De verkoopprijzen per product zijn *f* 170,— voor product A, *f* 150,— voor product B en *f* 260,— voor product C. Er zijn voor deze producten geen problemen met de afzet. We vatten de gegevens als volgt samen:

	Product A	Product B	Product C
Verkoopprijs	*f* 170,—	*f* 150,—	*f* 260,—
Variabele kosten:			
– Materiaalkosten	*f* 75,—	*f* 75,—	*f* 75,—
– Arbeidskosten	*f* 80,—	*f* 100,—	*f* 160,—
	f 155,—	*f* 175,—	*f* 235,—
Dekkingsbijdrage	*f* 15,—	(*f* 15,—)	*f* 25,—

Op het eerste gezicht levert de productie (en verkoop) van product C het beste resultaat, omdat de dekkingsbijdrage per product bij product C het hoogst is. Bij nader onderzoek blijkt echter dat product C toch niet het hoogste totale resultaat per kwartaal oplevert, omdat er geen rekening is gehouden met de knelpuntsfactor arbeid. Per kwartaal kunnen de volgende hoeveelheden product worden voortgebracht: product A 1920 stuks (= 1920/1), product B 1536 stuks (= 1920/1,25) en product C 960 stuks (= 1920/2). We zien hierna dat product A het beste resultaat oplevert. De totale dekkingsbijdragen per kwartaal voor de producten zijn als volgt:

Product A:	*f* 28.800,— winst	(= 1920 × *f* 15,—)
Product B:	*f* 23.040,— verlies	(= 1536 × (*f* 15,—))
Product C:	*f* 24.000,— winst	(= 960 × *f* 25,—).

Dit voorbeeld leert ons dat de *dekkingsbijdrage per product* niets zegt over het product dat het beste resultaat oplevert. Niet product C, maar product A levert het beste resultaat op per kwartaal. De knelpuntsfactor arbeid is hiervan de oorzaak. Voor de productie van product C zijn 2 uur nodig, terwijl voor de productie van A slechts 1 uur nodig is. De *dekkingsbijdrage per eenheid knelpuntsfactor* is bij product A het hoogst. Zie het volgende overzicht:

	Product A	Product B	Product C
Dekkingsbijdrage per product	*f* 15,—	(*f* 15,—)	*f* 25,—
Aantal benodigde arbeidsuren	1	1,25	2
Dekkingsbijdrage per arbeidsuur	*f* 15,—	(*f* 12,—)	*f* 12,50
Totale dekkingsbijdrage (voor 1920 arbeidsuren)	*f* 28.800,—	(*f* 23.040,—)	*f* 24.000,—

Conclusie: Niet de dekkingsbijdrage per product, maar de dekkingsbijdrage per eenheid knelpuntsfactor is bepalend voor de keus.

Ad 2. Een productiecapaciteit met meer dan één knelpunt
In het bovenstaande voorbeeld 2 was slechts sprake van één knelpuntsfactor. Om een maximale totale dekkingsbijdrage te bereiken, moet de onderneming zorgen dat de dekkingsbijdrage per eenheid knelpuntsfactor zo groot mogelijk is.

Hierna volgt een voorbeeld van een onderneming die te maken heeft met meer dan één knelpuntsfactor. Om ook in zo'n situatie het optimale productie- en verkoopprogramma te bepalen, maakt men gebruik van lineaire programmering. *Lineaire programmering* (LP) is een optimaliseringsmodel dat wordt gebruikt om schaarse middelen te alloceren teneinde een bepaalde doelstelling te bereiken, bijvoorbeeld winstmaximalisatie of kostenminimalisatie. De knelpunten worden in een LP-model weergegeven door middel van randvoorwaarden, ook wel restricties genoemd. Voorwaarde bij deze techniek is dat de verbanden lineair van aard zijn. Indien er bijvoorbeeld 10% meer producten worden verkocht, nemen ook de omzet en de variabele kosten toe met 10%. Lineariteit impliceert dus dat de verhouding tussen de veranderingen steeds constant is. Verder wordt ook verondersteld dat de producten en productiemiddelen volledig deelbaar zijn en dat er sprake is van volledige zekerheid.

In een LP-model moeten drie stappen worden ondernomen:
1. Bepaal en formuleer de doelstellingsfunctie.
2. Bepaal en formuleer de randvoorwaarden.
3. Bepaal het optimum.

Voor de oplossing van een LP-model maakt men veelal gebruik van de Simplex-techniek. Deze techniek bestaat uit een aantal 'rekenregels' waarmee de optimale oplossing te bepalen is. In de meeste gevallen zal men al snel een beroep op de computer moeten doen om de optimale oplossing te vinden.
In eenvoudige situaties, waarin men de toepassing beperkt tot twee variabelen, biedt de grafische methode een oplossing.

Voorbeeld 3
Een bedrijf heeft twee machines: machine II en machine III. Met deze twee machines kunnen twee verschillende producten worden voortgebracht: B_1 en B_2. De productie van één eenheid B_1 vergt van machine II 8 uur en van machine III 6 uur; de contributiebijdrage bedraagt *f* 40,—. Voor B_2 bedragen de overeenkomstige cijfers: 5 uur, 10 uur en *f* 35,—. De capaciteit van machine II bedraagt 2000 uur en van machine III 1800 uur.

Gevraagd:
Hoeveel producten B_1 en/of B_2 moeten er worden geproduceerd en verkocht, indien het bedrijf de totale contributiemarge wil maximaliseren? (De totale contributiemarge is de totale omzet minus de totale variabele kosten.)

Oplossing:
Samengevat ziet het LP-model er als volgt uit:

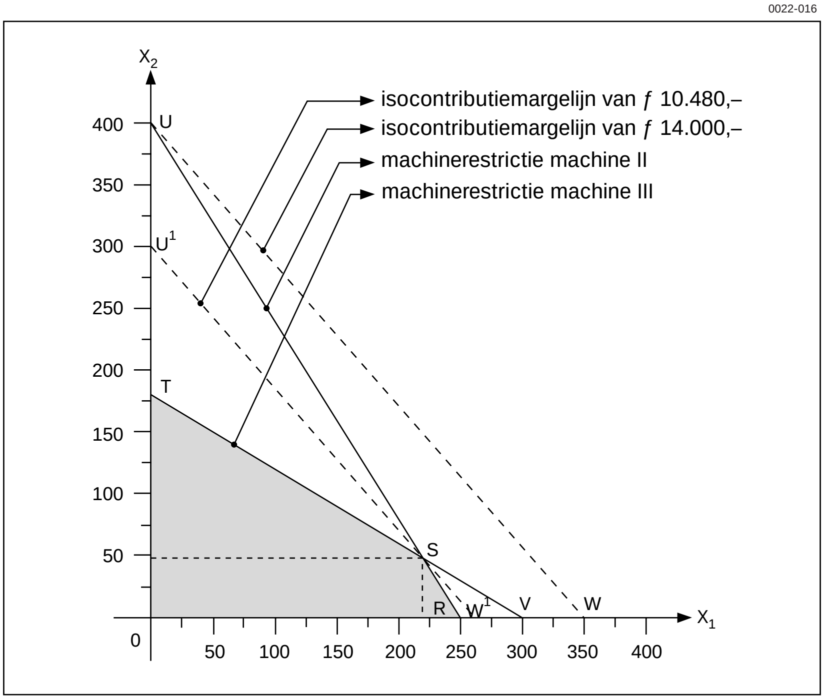
Doelstellingsfunctie:	Max. $Z = 40\ x_1 + 35\ x_2$	(1)
Restrictie voor machine II:	$8\ x_1 + 5\ x_2 \leq 2000$	(2)
Restrictie voor machine III:	$6\ x_1 + 10\ x_2 \leq 1800$	(3)
Niet-negativiteitsrestrictie:	x_1 en $x_2 \geq 0$	(4)

De hoeveelheden product B_1 en B_2 worden weergegeven met de symbolen x_1 en x_2.

Vergelijking (1) geeft aan dat de totale te maximaliseren contributiemarge Z uit twee delen kan bestaan, namelijk een deel dat wordt behaald door de productie en de verkoop van B_1 ($40\ x_1$) en het deel dat wordt behaald door de productie en de verkoop van B_2 ($35\ x_2$).
Vergelijking (2) geeft aan dat machine II 2000 uur beschikbaar heeft en dat de productie van B_1 en B_2 respectievelijk 8 en 5 machine-uren per product vergt.
Vergelijking (3) geeft aan dat machine III 1800 uur beschikbaar heeft en dat de productie van B_1 en B_2 respectievelijk 6 en 10 machine-uren per product vergt.
Vergelijking (4) geeft volledigheidshalve aan dat de variabelen x_1 en x_2 niet negatief kunnen zijn.

De grafische weergave van de doelstellingsfunctie en de restricties is als volgt:

1 Dit voorbeeld is ontleend aan het boek *Linpro, Lineaire programmering in bedrijven* van J. Dijksma en C. van Halem, Spruyt, Van Mantgem & De Does b.v., Leiden, 1982.



Figuur 2. Grafische weergave van het LP-model.

Allereerst worden de drie restricties in beeld gebracht. Daar tegelijkertijd aan de restricties moet worden voldaan, blijft het gearceerde gebied – begrensd door de vierhoek OTSR – over. Uit de hier weergegeven productiemogelijkheden dient die mogelijkheid te worden gekozen die de hoogste totale contributiemarge oplevert. Hiertoe wordt een zogenaamde isocontributiemargelijn getekend.
Een *isocontributiemargelijn* is een verzameling van punten (lijn) waarop alle mogelijke combinaties van de beslissingsvariabelen x_1 en x_2 liggen, die eenzelfde (uit het Grieks *isos* = gelijk) totaalbedrag aan omzet minus totale variabele kosten (dat is dus de totale contributiemarge) opleveren. De richting van deze lijn wordt bepaald door de richting van de doelstellingsfunctie, in dit geval dus door de coëfficiënten 40 en 35. De richtingscoëfficiënt is hier - 40/35.

Stel dat wordt uitgegaan van een totale contributiemarge van ƒ 14.400,—. Dit wordt weergegeven door de lijn UW ($Z = 40\ x_1 + 35\ x_2 =$ ƒ 14.400,—). Deze lijn valt echter buiten het (gearceerde) gebied van de productiemogelijkheden. In figuur 2 is ook de isocontributiemargelijn U'W' weergegeven; dat is de lijn die zover mo-

gelijk van de oorsprong en tegelijkertijd binnen de productiemogelijkheden ligt. De optimale oplossing (punt S: x_1 = 220 en x_2 = 48) geeft een totale contributiemarge van 220 × *f* 40,— + 48 × *f* 35,— = *f* 10.480,—.
De hoekpunten in de grafiek, met de daarbij behorende contributiemarge, zijn in de tabel hieronder weergegeven.

Hoekpunt	x_1	x_2	Dekkingsbijdrage
O	0	0	0 × *f* 40,— + 0 × *f* 35,— = *f* -0-
T	0	180	0 × *f* 40,— + 180 × *f* 35,— = *f* 6.300,—
S	*220*	*48*	*220 × f 40,— + 48 × f 35,— = f 10.480,—*
R	250	0	250 × *f* 40,— + 0 × *f* 35,— = *f* 10.000,—

Bij deze uitkomst zijn machine II en machine III volledig bezet:
machine II: (220 × 8 uur) + (48 × 5 uur) = 2000 uur;
machine III: (220 × 6 uur) + (48 × 10 uur) = 1800 uur.

Bij andere coëfficiënten (parameters), ofwel andere ‘getallen’ in het LP-model kan de uitkomst ook anders zijn. In het hiervoor gegeven model zijn dat:
– het maximaal beschikbare aantal machine-uren;
– de contributiemarge (prijs minus variabele kosten) per product;
– de machine-uren per product.

Er zijn bij een andere richting van de isocontributiemargelijn ook optimale oplossingen denkbaar die leiden tot een volledige bezetting van slechts één van de machines. Indien bijvoorbeeld de contributiemargelijn vlakker (minder steil) zou verlopen dan de lijn UW, kan de optimale oplossing in punt T terechtkomen. Stel bijvoorbeeld dat de contributiemarge van B_1 afneemt van *f* 40,— tot *f* 5,—. Eerst zal er nog niets veranderen, maar als de dekkingsbijdrage *f* 24,— bedraagt dan zijn de richting van de isocontributiemargelijn en de richting van de restrictie van machine III aan elkaar gelijk. De optimale oplossing is dan lijnstuk ST; er zijn dan dus een aantal oplossingen mogelijk. Als de contributiemarge *f* 5,— per product is, dan komt de optimale oplossing in punt T (x_1 = 0 en x_2 = 180). In dat geval is de bezetting van de machines als volgt:
machine II: (0 × 8 uur) + (180 × 5 uur) = 900 uur;
machine III: (0 × 6 uur) + (180 × 10 uur) = 1800 uur.

Machine III is volledig bezet en machine II heeft een onderbezetting van 1100 uur (2000 − 900).

De optimale situatie kan dus wijzigen door een verandering in de verhouding van de contributiemarges (de lijn U'W' verandert van richting). Andere factoren die tot wijzigingen in het optimale productie- en verkoopprogramma kunnen leiden, zijn:

– het aantal beschikbare machine-uren (bijvoorbeeld de lijn UR verschuift naar rechts, indien er meer uren bij machine II beschikbaar komen);
– het voor een product benodigde aantal machine-uren (bijvoorbeeld de lijn UR verandert van richting).

5 Schaduwprijzen

In bedrijfseconomische beschouwingen kan men het begrip schaduwprijs aantreffen. De schaduwprijs kan worden gebruikt als richtsnoer bij het oplossen van een aantal bedrijfseconomische keuzevraagstukken. De schaduwprijs wordt bepaald in een bijzonder LP-model, het zogenaamde duale model.

Het verschil tussen het primaire model, zoals in voorbeeld 3 is besproken, en het duale model is een verschil in benaderingswijze. In het primaire model zijn de randvoorwaarden gericht op een beschouwing per productiemiddel en wordt de doelfunctie naar het product gespecificeerd. Bij het duale model beschouwt men de randvoorwaarden per product en wordt de doelfunctie gespecificeerd per productiemiddel. In voorbeeld 4 wordt, voor de bespreking van de inhoud van het begrip schaduwprijs, uitgegaan van het aan voorbeeld 3 ten grondslag liggende model.

Voorbeeld 4
Het primaire LP-model uit voorbeeld 3 is als volgt:

Doelstellingsfunctie:	Max. $Z = 40\ x_1 + 35\ x_2$
Restrictie voor machine II:	$8\ x_1 + 5\ x_2 \leq 2000$
Restrictie voor machine III:	$6\ x_1 + 10\ x_2 \leq 1800$
Niet-negativiteitsrestrictie:	x_1 en $x_2 \geq 0$

De oplossing is: $x_1 = 220$ en $x_2 = 48$.

Veronderstel nu dat machine II niet 2000, maar slechts 1999 uur beschikbaar is. Het model zou er dan als volgt uitzien:

Doelstellingsfunctie:	Max. $Z = 40\ x_1 + 35\ x_2$
Restrictie voor machine II:	$8\ x_1 + 5\ x_2 \leq 1999$
Restrictie voor machine III:	$6\ x_1 + 10\ x_2 \leq 1800$
Niet-negativiteitsrestrictie:	x_1 en $x_2 \geq 0$

De oplossing is in dit geval: $x_1 = 219{,}8$ en $x_2 = 48{,}12$.

Het feit dat er één eenheid van machine II minder beschikbaar is, heeft de volgende consequenties:
220 − 219,8 = 0,2 eenheden B_1 minder en
48,12 − 48 = 0,12 eenheden B_2 meer.

De gevolgen hiervan voor de totale contributiemarge zijn:

0,2 eenheden B_1 × *f* 40,— dekkingsbijdrage =	*f* 8,— daling
0,12 eenheden B_2 × *f* 35,— dekkingsbijdrage =	*f* 4,20 stijging
daling totale contributiemarge	*f* 3,80

Een overeenkomstige redenering ten aanzien van één eenheid van machine III minder leidt tot een daling van de totale contributiemarge van *f* 1,60. Anders gezegd: gebruikt men één uur van machine II respectievelijk III niet, dan laat men de gelegenheid (‘opportunity’) voorbijgaan om de maximale totale contributiemarge te behalen, zodat de totale contributiemarge daalt, uitgaande van het optimale programma. In dat geval offert men waarde op; deze opgeofferde waarde is de waarde van één eenheid knelpunt, i.c. het machine-uur.
Gebruikt men één machine-uur anders dan voor de voortbrenging van B_1 en B_2 in de hiervoor berekende optimale verhouding, dan zal in deze andere aanwending minstens een contributiemarge per machine-uur ter grootte van de schaduwprijs verkregen moeten worden wil de totale contributiemarge niet aangetast worden. Dit verklaart waarom men van ‘opportunity costs’ spreekt.

Het is, gezien het bovenstaande, begrijpelijk dat de *schaduwprijs* wel als volgt wordt omschreven: het bedrag waarmee de totale contributiemarge toe- of afneemt, indien men één eenheid van het betreffende productiemiddel meer, respectievelijk minder heeft.

Analoog aan de berekening hiervoor, kan men ook een berekening maken voor het geval de capaciteit van machine II 2001 uur zou bedragen.
De oplossing is in dat geval: $x_1 = 220{,}2$ en $x_2 = 47{,}88$.
De schaduwprijs van één eenheid machine II bedraagt ook dan *f* 3,80.

Op overeenkomstige manier berekend voor één eenheid van machine III meer, leidt dit tot een schaduwprijs van *f* 1,60.

De schaduwprijs blijkt dus onafhankelijk te zijn van het feit of het gaat om één eenheid meer of minder. Er is in beginsel voor elke restrictie, i.c. productiemiddel, één schaduwprijs. Het is evenwel denkbaar dat één of meer van de schaduwprijzen nul is. De schaduwprijs is nul wanneer de desbetreffende restrictie niet bindend is, c.q. de machine niet volledig bezet is. Een niet bindende restrictie heeft geen invloed op de optimale oplossing, in tegenstelling tot een bindende restrictie.

Indien de optimale oplossing in de punten T of R ligt (zie figuur 2), dan zal één van de schaduwprijzen nul zijn. Eén eenheid meer of minder van een niet volledig bezette machine zal niets aan de totale contributiemarge veranderen, met andere woorden: de schaduwprijs is dan nul.

Indien er één eenheid minder B_1 wordt geproduceerd, zal de totale contributiemarge met *f* 40,— dalen. Er is dan 8 uur van machine II en 6 uur van machine III niet gebruikt. De daling van de totale contributiemarge ad *f* 40,— kan ook met behulp van de schaduwprijzen worden vastgesteld. Immers, 8 uur van machine II levert dan 8 × *f* 3,80 = *f* 30,40 en 6 uur van machine III, 6 × *f* 1,60 = *f* 9,60, dat is te zamen *f* 40,— minder aan contributiemarge op.

Indien y_{II} respectievelijk y_{III} de schaduwprijs van machine II respectievelijk machine III voorstelt, geldt de volgende relatie in het optimum:

$$8y_{II} + 6y_{III} = 40.$$

Op overeenkomstige wijze kan – voor het geval dat er één eenheid B_2 minder geproduceerd zou worden – gesteld worden:

$$5y_{II} + 10y_{III} = 35.$$

Het linkerlid van de vergelijkingen (de ‘opportunity costs’ per eenheid product) hoeft niet gelijk te zijn aan het rechterlid (de contributiemarge per eenheid product), maar kan ook groter zijn. Indien dat het geval is, zal men niet overgaan tot de voortbrenging van het product. Men offert dan immers meer op dan men ervoor terugkrijgt.

De vergelijkingen moeten dan ook als volgt worden geschreven:

$8y_{II} + 6y_{III} \geq 40$ (1)
$5y_{II} + 10y_{III} \geq 35$ (2)

Het totale bedrag van de 'opportunity costs' (Z) dat in dit voorbeeld in het geding is, bedraagt: $Z = 2000y_{II} + 1800y_{III}$. Dit bedrag zal men zo klein mogelijk willen houden, dus geldt:

$\text{Min. } Z = 2000y_{II} + 1800y_{III}$ (3)

De vergelijkingen (1), (2) en (3) vormen de basis voor het duale model. Dit model vormt als het ware het spiegelbeeld van het primaire model. Voor de volledigheid moet ook de eis worden gesteld dat y_{II} en y_{III} niet negatief mogen zijn.

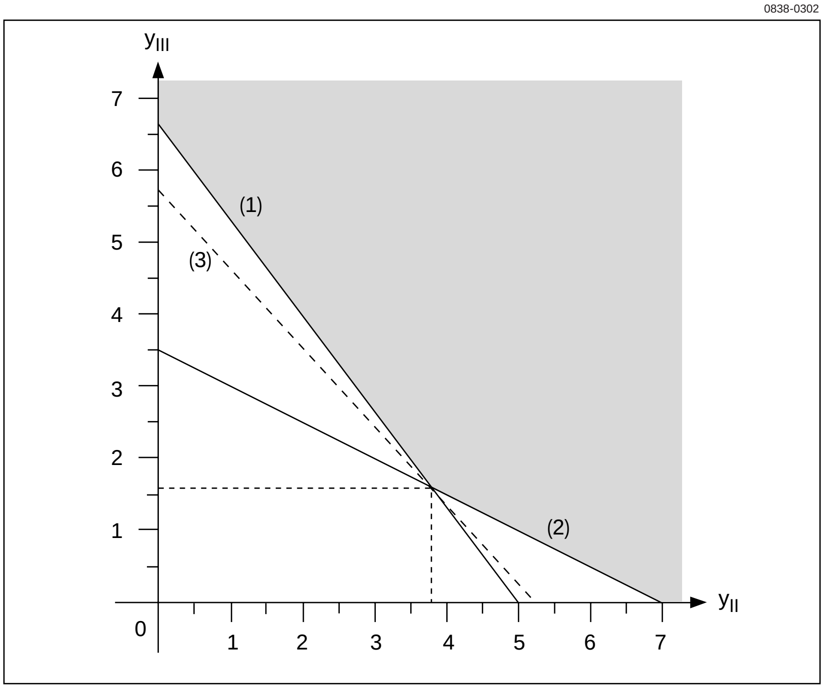
Het volledige duale model luidt als volgt:

$\text{Min. } Z = 2000y_{II} + 1800y_{III}$
$8y_{II} + 6y_{III} \geq 40$
$5y_{II} + 10y_{III} \geq 35$
y_{II} en $y_{III} \geq 0$

De oplossing van dit probleem geeft de in de optimale situatie geldende schaduwprijzen. In figuur 3 is de grafische oplossing weergegeven. De optimale waarden luiden: $y_{II} = f\ 3{,}80$ en $y_{III} = f\ 1{,}60$. Deze uitkomst komt overeen met de eerder gevonden waarden.

De coëfficiënten van het duale model kunnen uit de formulering van het primaire model worden afgeleid doordat de coëfficiënten uit de kolommen van het primaire model overeenkomen met de coëfficiënten uit de regels van het duale model. Zo luiden de coëfficiënten uit de eerste kolom van het primaire model 8, 60 en 40. Deze coëfficiënten komen op de eerste regel van het duale model voor. Overeenkomstige redeneringen gelden voor de andere regels en kolommen.

De schaduwprijs bezit in principe alleen geldigheid in het optimale punt of in het gebied daar direct omheen. Indien men dus met behulp van een schaduwprijs bijvoorbeeld een incidentele order wil beoordelen op haar aantrekkelijkheid, is het nog maar de vraag of bij een eventuele acceptatie het optimum niet zodanig zal verschuiven dat de oorspronkelijke schaduwprijzen hun betekenis verliezen. In



Figuur 3. Grafische weergave van het duale model.

soortgelijke gevallen kan het dan ook aanbeveling verdienen om het model te herformuleren in plaats van met schaduwprijzen te werken die slechts binnen een bepaalde 'range' geldigheid bezitten.

6 Toepassingen van lineaire programmering en schaduwprijzen

In de voorbeelden 3 en 4 beperkte het probleem zich tot het bepalen van het optimale productie- en verkoopprogramma bij een gegeven capaciteit. Eerder werd al de mogelijkheid genoemd om met behulp van schaduwprijzen een incidentele order te beoordelen op haar aantrekkelijkheid.
We zullen nu ingaan op een aantal mogelijke toepassingen van lineaire programmering en het gebruik van schaduwprijzen.

Toepassingen van lineaire programmering zijn onder meer te vinden bij de volgende bedrijfsvraagstukken:
– investeringsselectie;
– mediaselectie;
– inkoopselectie;

– transportkeuze;
– integrale financiële planning;
– standaardhoeveelheden;
– gemeenschappelijke kosten.

Bij *investeringsselectie* moet de bedrijfsleiding een keuze maken uit een aantal investeringsprojecten, gegeven een beperkte hoeveelheid vermogen. Een van de criteria voor de keuze uit investeringsprojecten is de 'netto contante waarde'. Indien een onderneming de totale netto contante waarde wil maximaliseren, rekening houdend met onder meer de restrictie van het beschikbare vermogen, dan is het mogelijk om daarvoor een LP-model te gebruiken.

Bij *mediaselectie* gaat het om de vraag welk medium een onderneming gebruikt om een reclamecampagne te voeren. Getracht zal worden om het reclamebudget zodanig over de diverse alternatieven, in casu reclamekanalen, te verdelen dat een maximale effectiviteit wordt bereikt. Onder effectiviteit wordt in dit verband verstaan: het bereiken van koopkracht.

Het probleem van de *inkoopselectie* heeft betrekking op de keuze van een optimaal inkoopprogramma. In de voorbeelden ging het tot nu toe steeds om een te maximaliseren doelstellingsfunctie. Bij inkoopselectie daarentegen gaat het om kostenminimalisatie. Als voorbeeld noemen we een landbouwbedrijf dat, op basis van een advies van een landbouw-economisch instituut, tegen minimale kosten de benodigde meststoffen wil kopen en daartoe een keuze moet maken uit twee verschillende kwaliteiten die in zakken met een bepaald gewicht worden verkocht. Ter bepaling van het aantal zakken van elke kwaliteit kan gebruik worden gemaakt van LP. Een variant op het probleem van kostenminimalisatie is de mogelijkheid om bij de voortbrenging van bepaalde producten, zoals voedingsmiddelen, chemicaliën en petrochemische producten, gebruik te maken van verschillende combinaties van grondstoffen, met inachtneming van de (kwaliteits)eisen van de output.

Een bekend LP-probleem is het probleem van de *transportkeuze*. Hierbij moet bijvoorbeeld een gegeven hoeveelheid goederen of mensen tegen minimale kosten naar diverse geografisch verspreid liggende plaatsen worden vervoerd.
Als voorbeeld noemen we een mijnbouwbedrijf dat twee mijnen heeft waar een bepaalde delfstof wordt gewonnen, die vervolgens verder wordt bewerkt in een tweetal fabrieken, die op ongelijke af-

stand liggen van de vindplaatsen. In elke periode is het aantal gewonnen tonnen delfstof in beide mijnen samen precies gelijk aan de totale verwerkingscapaciteit van de twee fabrieken samen. Het aantal tonnen gewonnen delfstof per mijn is niet gelijk, de verwerkingscapaciteit per fabriek is niet gelijk en wijkt ook af van de hoeveelheden gewonnen delfstof per mijn. Deze onderneming staat voor het probleem om de totale transportkosten te minimaliseren.

Bij de *integrale financiële planning* tracht men het hele bedrijf door middel van een LP-model te optimaliseren. In zo'n totaalmodel worden in beginsel alle bedrijfsfuncties (zoals inkoop, productie, verkoop, vervoer en financiering) geoptimaliseerd. Dat is dus anders dan bij de hiervoor genoemde allocatievraagstukken, omdat die steeds betrekking hadden op een deel van het bedrijf. Het totaalmodel zal het bedrijf op een relatief hoog abstractieniveau beschrijven. Noodgedwongen zal het model luiden in geaggregeerde financiële stromen zoals totale inkopen en totale verkopen.

Bij de bepaling van de *standaardhoeveelheden* gaat het om de vraag: welke hoeveelheden van elke productiefactor moeten er worden opgeofferd om één eenheid van een bepaald (eind)product voort te brengen? Indien een product slechts op één unieke manier kan worden voortgebracht, is deze vraag snel beantwoord. Men vindt de standaardhoeveelheden dan door technische meting van het verbruik van de verschillende productiefactoren. Anders ligt het indien er sprake is van een product dat door verschillende productiemiddelen-combinaties kan worden voortgebracht. Op welke wijze zal de productie moeten plaatsvinden om de kosten te minimaliseren? In dit geval spelen allereerst de prijzen van de productiefactoren een rol, maar daarnaast ook de belasting van een eventueel bestaand knelpunt. Met behulp van een LP-model kan men dan berekenen in welke mate gebruik zal worden gemaakt van de verschillende productiemiddelen-combinaties. Het kan zijn dat de keuze valt op slechts één van de beschikbare productiemiddelen-combinaties, maar het kan ook zijn dat de uitkomst is dat de eindproducten tezelfdertijd op een aantal manieren worden voortgebracht.

Er is sprake van *gemeenschappelijke kosten* bij productieprocessen waaruit technisch noodzakelijk twee (of meer) producten ontstaan. In de eerste fase van het productieproces, als de producten nog niet afzonderlijk herkenbaar zijn, is er sprake van gemeenschappelijke kosten. Voorbij een bepaald punt zijn de producten wel afzonderlijk herkenbaar in het productieproces. Voorbeelden van productieprocessen met gemeenschappelijke kosten vinden we onder meer bij slachterijen (huiden en diverse soorten vlees), landbouwbedrijven (graankorrels en stro) en olieraffinaderijen (benzine, smeerolie e.d.). Voor een landbouwbedrijf dat zich primair richt op de voortbrenging van graan is het onder meer de vraag of het stro dat vrijkomt, moet worden verbrand of wellicht verder moet worden bewerkt.

In veel LP-voorbeelden beperkt men de behandeling tot modellen die grafisch worden afgebeeld en opgelost. Anders gezegd: men beperkt de toepassing tot twee variabelen. Indien men met meer dan twee variabelen werkt, komt deze oplossingstechniek op de achtergrond. Zoals hiervoor reeds is aangegeven, zijn er efficiënte rekenmethoden om problemen met meer dan twee variabelen met de hand of met de computer op te lossen. Er komen steeds meer goedkope, kleine en snelle computers (met software) beschikbaar. Voor de beoefening van de economie behoeft de oplossingstechniek overigens geen bezwaar te vormen, omdat het in de eerste plaats gaat om de modelformulering en de interpretatie van de uitkomsten.

Toepassingen van de schaduwprijs (in het zogenoemde duale model) komen vooral aan de orde in situaties waarin tijdens de planningsperiode nieuwe alternatieven beschikbaar komen. Een mogelijke benadering kan zijn om het oorspronkelijke LP-model aan te vullen met de nieuwe alternatieven en dan het geherformuleerde model opnieuw op te lossen. Het is echter in een aantal gevallen ook mogelijk om de herformulering achterwege te laten en gebruik te maken van de schaduwprijzen die behoren bij het oorspronkelijke optimum. Eventuele nieuwe alternatieven zullen ten minste eenzelfde dekkingsbijdrage per knelpuntsfactor moeten opleveren, willen zij worden uitgevoerd in de plaats van eerder gekozen alternatieven. Voorbeelden van toepassingen van schaduwprijzen zijn onder meer te vinden op de volgende terreinen:
- incidentele orders;
- zelf maken, of kopen;
- transfer pricing.

Ten aanzien van de toepassing van schaduwprijzen gelden overigens wel een aantal beperkingen. Een schaduwprijs bezit in beginsel alleen geldigheid in het optimale punt, of in het gebied daar direct omheen. Bij grote verschuivingen ten opzichte van het optimum verliezen de berekende schaduwprijzen hun geldigheid en ontkomt men niet aan herformulering van het model.

7 Samenvatting en conclusies

In deze bijdrage is aandacht geschonken aan de toepassing van de techniek van lineaire programmering en schaduwprijzen in knelpuntssituaties. Uitgaande van een onderneming die op korte termijn streeft naar een maximale winst c.q. maximale totale dekkingsbijdrage, is niet de dekkingsbijdrage per product maar de dekkingsbijdrage per knelpuntsfactor bepalend voor de capaciteitsbenutting. Ten aanzien van de benutting van een gegeven capaciteit is het van belang om onderscheid te maken tussen een capaciteit met één knelpunt en een capaciteit met meer dan één knelpunt. Indien er tegelijkertijd meerdere knelpunten optreden, zal men gebruik moeten maken van lineaire programmering. Hierbij gelden overigens wel de voorwaarden dat er sprake is van lineaire verbanden en dat de producten en productiemiddelen volledig deelbaar zijn. Er bestaat een nauw verband tussen knelpuntscalculatie en het rekenen met opportunity costs (= alternatieve opbrengsten). Knelpuntscalculatie is in feite ‘opportunity costing’. In dat verband kwam ook het begrip schaduwprijs aan de orde.
Ten slotte werd ingegaan op een aantal concrete toepassingen van lineaire programmering en de schaduwprijs, alsmede op de beperkingen die daarbij gelden.

8 Literatuur

Anderson, D. R., D. J. Sweeny and T. A. Williams, *Linear Programming for Decision Making.* West Publishing Company, St. Paul, 1974.
Anderson, D. R., D. J. Sweeny and T. A. Williams, *An Introduction to Management Science: Quantitative Approaches to Decision Making.* 5th ed., West Publishing Company, St. Paul, 1988.
Bierman, H., C. P. Bonini and W. H. Hausman, *Quantitative Analysis for Business Decisions.* Homewood, 1977.
Dijksma, J. en C. van Halem, Enkele beschouwingen over de schaduwprijs en daarmee samenhangende begrippen, *Maandblad voor Bedrijfsadministratie en -Organisatie*, mei 1975.
Dijksma, J. en C. van Halem, *LINPRO, Lineaire programmering in bedrijven.* Spruyt, Van Mantgem & De Does b.v., Leiden, 1982.
Goldratt, Eliyahu M. and Jeff Cox, *The goal.* North River Press, Inc., Croton-on-Hudson, N.Y., 1986.
Halem, C. van, Integrale financiële planning op basis van dubbel

boekhouden en lineair programmeren, *Maandblad voor Bedrijfsadministratie en -Organisatie*, februari 1977.

Halem, C. van en A. van der Pol, *Kosten en kosten, Calculatieve bestuurlijke informatie*. Wolters-Noordhoff bv, Groningen, 1989.

Harrison, B. and A. Baker, Plant Planning Models in the Coal Industry, in: *Financial Modelling in Corporate Management*. Ed. J. W. Bryant, Chichester, 1982.

Horngren, Charles, T., George Foster and Srikant M. Datar, *Cost Accounting: A Managerial Emphasis*. 8th ed., Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ 07632, 1994.

Schroeff, H. J. van der, *Kosten en kostprijs*. Kosmos, Amsterdam/Antwerpen, 1980.